

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del primer corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. El documento está basado en ejercicios de los textos [1] y [2]. Para problemas similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

<https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-aneec>

1. Calcule los valores de la función dada.

a) $f(x, y) = x^2 + 2x(y - 1)^2$; $f(2, 1)$, $f(1, 2)$.

b) $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$; $g(5, 4)$, $g(-2, 1)$.

c) $f(r, s) = rs + \frac{8}{r} + \frac{8}{s}$; $f(1, -1)$.

d) $g(x, y) = (x - 5) \ln(xy)$; $g(e^2, e^3)$.

e) $f(x, y) = \frac{3x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$; $f(1, -3)$.

f) $g(u, v) = e^{-(u^2+v^2-6uv)}$; $g(0, -2)$.

g) $f(x, y) = \frac{\ln(x + 2y)}{y^2}$; $f(9, -4)$.

h) $f(u, v) = \frac{uv^2}{u^2v^3 + 1}$; $f(1, 0)$.

i) $g(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$; $g(1, 2)$.

j) $f(x, y) = x^2 - 3xy + \sqrt{x + y}$; $f(1, 3)$, $f(-1, 1)$.

k) $f(x, y, z) = xye^z + xze^y + yze^x$; $f(\ln 2, \ln 3, \ln 4)$.

2. Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x + y}}$.

b) $f(x, y) = \frac{4}{4 - x^2 - y^2}$.

c) $f(x, y) = \frac{x + y}{xy}$.

d) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{2x - y}$.

e) $f(x, y) = \frac{e^{\sqrt{y}}}{y + x}$.

f) $f(x, y) = \frac{\ln(x - 2)}{y - 2}$.

g) $f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2}$.

h) $f(x, y) = \log(y - x^3 - 1)$.

i) $f(x, y) = \frac{(x + 2)e^{2y}}{(y - x^2)(y - 4)}$.

j) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4}$.

k) $f(x, y) = \frac{1}{y - \ln x}$.

l) $f(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2) + \sqrt{y - 2}$.

m) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

n) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - y}$.

ñ) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$.

o) $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$.

p) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$.

q) $f(x, y) = \ln(2y + x - 4)$.

r) $f(x, y) = \frac{5x + 7}{y^2 - x^2}$.

s) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \ln(9 - x^2 - y^2)$.

t) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y - x}$.

u) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$.

v) $f(x, y) = \frac{x}{e^x - 9}$.

w) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y} - \sqrt{y - x^2 + 1}$.

x) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2 - y}$.

y) $f(x, y) = \ln(y - x^2) + \ln(1 - x^2 - y^2)$.

z) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(-y - x^2)$.

3. Sea $F(x, y) = Ax^a y^b$ una función de Cobb–Douglas, halle una expresión de $F(2x, 2y)$ y de $F(tx, ty)$ donde t es un número positivo arbitrario.

4. Sea $F(K, L) = 10K^{1/2}L^{1/3}$, $K \geq 0$, $L \geq 0$. a) Halle $F(1, 1)$, $F(4, 27)$, $F(9, 1/27)$, $F(2K, 2L)$. b) Halle una constante a tal que $F(tK, tL) = t^a F(K, L)$ para todo $t > 0$.

5. Ciertos estudios de economía agraria emplean funciones de producción de la forma $Y = F(K, L, T)$, donde Y es el volumen de la cosecha, K el capital invertido, L el trabajo y T la superficie de la explotación agrícola.

a) Explique el significado de $F(K + 1, L, T) - F(K, L, T)$.

b) Muchos estudios suponen que F es de Cobb–Douglas. ¿Qué forma tiene F ?

c) Si F es de Cobb–Douglas, halle $F(tK, tL, tT)$ expresándola en términos de t y $F(K, L, T)$.

6. Una tienda tiene dos tipos de CD virgen. Se ha estimado que si se vende el primer tipo de CD a p_1 y el segundo tipo de CD a p_2 la ecuación de demanda del primer tipo de CD está dada por $D_1(p_1, p_2) = 100 - 5p_1 + 12p_2$ y la ecuación de demanda del segundo tipo de CD está dada por $D_2(p_1, p_2) = 200 + 6p_1 - 10p_2$ unidades a la semana.

a) Si I denota el ingreso total a la semana, determine I como función de p_1 y p_2 .

b) Calcule el ingreso total a la semana si el primer tipo de CD se vende a 3 UM y el segundo a 2 UM.

7. Una empresa produce dos tipos de productos X e Y . El costo de material y mano de obra por producir una unidad de X es 3 UM y el de Y es 4 UM. Suponga que la empresa tiene costos fijos semanales de 1 000 UM.

a) Obtenga el costo semanal como función de las unidades de los dos tipos de artículos producidos.

b) Si la compañía vende el producto X a 4 UM y el Y a 6 UM. Obtenga la función utilidad mensual como función del número de unidades producidas y vendidas a la semana.

8. Con x trabajadores calificados e y trabajadores no calificados, un fabricante puede producir $Q(x, y) = 10x^2y$ unidades por día. En la actualidad hay en el trabajo 20 trabajadores calificados y 40 no calificados.

a) ¿Cuántas unidades se produce cada día?

b) ¿En cuánto cambiará el nivel de producción diario si se adiciona un trabajador calificado a la fuerza laboral actual?

- c) ¿En cuánto cambiará el nivel de producción diario si se adiciona un trabajador no calificado a la fuerza laboral actual?
-

9. Un almacén de pinturas vende dos marcas de pintura. Las cifras de venta indican que si la primera marca se vende a x_1 dólares por galón y la segunda a x_2 dólares por galón, la demanda de la primera marca será $D_1(x_1, x_2) = 200 - 10x_1 + 20x_2$ galones por mes y la demanda de la segunda marca será $D_2(x_1, x_2) = 100 + 5x_1 - 10x_2$ galones por mes.

- a) Exprese el ingreso total mensual del almacén de pinturas, obtenido de la venta de la pintura, como una función de los precios x_1 y x_2 .
- b) Calcule el ingreso en el literal anterior si la primera marca se vende a US\$ 6 por galón y la segunda US\$ 5 por galón.
-

10. La Odyssey Travel Agency tiene un presupuesto mensual de publicidad de \$20 000. La gerencia estima que si gastan x dólares en publicidad en periódico y y dólares en publicidad en televisión, los ingresos mensuales serán

$$I(x, y) = 30x^{1/4}y^{3/4}$$

dólares.

- a) ¿Cuál será el ingreso mensual si Odyssey gasta \$5 000 por mes en publicidad en periódico y \$15 000 en publicidad de televisión?
- b) ¿Cuál será el ingreso mensual si Odyssey gasta \$4 000 por mes en publicidad en periódico y \$16 000 en publicidad de televisión?
-

11. El pago mensual que amortiza un préstamo de A dólares en t años, cuando la tasa de interés anual es r , está dado por

$$P = f(A, r, t) = \frac{Ar}{12[1 - (1 + \frac{r}{12})^{-12t}]}$$

Determine el pago mensual de una hipoteca de \$270 000 para ser amortizada durante 30 años cuando la tasa de interés anual es de 8%, compuesta mensualmente.

12. El IQ (coeficiente intelectual) de una persona cuya edad mental es m años y cuya edad cronológica es a años está definida como

$$f(m, a) = \frac{100m}{a}$$

¿Cuál es el IQ de un niño de 9 años que tiene una edad mental de 13,5 años?

Referencias

- [1] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía*. Pearson, décimo tercera edición, 2015.
- [2] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales*. McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.