Departamento de Matemáticas y Estadística
Taller de preparación para el Parcial I
Cálculo III (ANEC)

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del primer corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. El documento está basado en ejercicios de los textos [1], [2] y [3]. Para problemas similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

`https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec`

1. Una corporación farmacéutica tiene dos plantas que producen la misma medicina. Si x e y son los números de unidades producidas en la planta 1 y en la planta 2, respectivamente, entonces el ingreso total del producto está dado por $I(x, y) = 200x + 200y - 4x^2 - 8xy - 4y^2$. Cuando $x = 4$ y $y = 12$, encuentre a) el ingreso marginal para la planta 1 y b) el ingreso marginal para la planta 2.

---

2. Una empresa fabrica dos tipos de estufas de combustión de madera: el modelo autoestable y el modelo para inserción en una chimenea. La función de costo para producir x estufas autoestables y y de inserción en una chimenea es
$$C(x, y) = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1\ 050.$$
   a) Calcule los costos marginales cuando $x = 8$ y $y = 20$.
   b) Cuando se requiera producción adicional, ¿qué modelo de estufa hará incrementar el costo con una tasa más alta?¿Cómo puede determinarse esto a partir del modelo del costo?

---

3. Considere la función de producción de Cobb–Douglas $f(x, y) = 200x^{0,7}y^{0,3}$. Si $x = 1\ 000$ y $y = 500$, halle a) la productividad marginal del trabajo y b) la productividad marginal del capital.

---

4. La función de utilidad $U = f(x, y)$ es una medida de la utilidad (o satisfacción) que obtiene una persona por el consumo de dos productos x y y. Suponga que la función de utilidad es $U(x, y) = -5x^2 + xy - 3y^2$.
   a) Determine la utilidad marginal del producto x.
   b) Determine la utilidad marginal del producto y.
   c) Si $x = 2$ y $y = 3$, ¿se debe consumir una unidad más de producto x o una unidad más de producto y? Explique el razonamiento.

---

5. Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por
$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = 3\sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$
   donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B, y p_A y p_B son los precios correspondientes (en dólares) por unidad.

a) Encuentre los valores de las dos demandas marginales para el producto B cuando $p_A = 9$ y $p_B = 16$.

b) Si p_B se reduce de 16 a 14, con p_A fijo en 9, use el inciso *a*) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto B.

---

6. La función de costos conjuntos para producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$C(q_A, q_B) = \frac{q_A^2(q_B^3 + q_A)^{1/2}}{17} + q_A q_B^{1/3} + 600$$

dólares.

a) Encuentre las funciones de costo marginal con respecto a q_A y q_B.

b) Evalúe la función de costo marginal con respecto a q_B cuando $q_A = 17$ y $q_B = 8$.

c) Use su respuesta al inciso *a*) para estimar el cambio en el costo si la producción del producto B disminuye de 8 a 7 unidades, mientras que la producción del producto A se mantiene en 17 unidades.

---

7. En economía, una función de producción Cobb–Douglas tiene la forma

$$P(l, k) = Al^\alpha k^\beta,$$

donde A, α y β son constantes y $\alpha + \beta = 1$. Para tal función, verifique que

a) $\dfrac{\partial P}{\partial l} = \alpha \dfrac{P}{l}$.

b) $\dfrac{\partial P}{\partial k} = \beta \dfrac{P}{k}$.

c) $l\dfrac{\partial P}{\partial l} + k\dfrac{\partial P}{\partial k} = P$. Esto significa que al sumar los productos de la productividad marginal por cada factor y la cantidad de ese factor, se obtiene la producción total P.

---

8. Un estimado de la función de producción para las granjas lecheras en Iowa (1939) está dado por

$$P = A^{0,27}B^{0,01}C^{0,01}D^{0,23}E^{0,09}F^{0,27},$$

donde P es la producción, A el terreno, B el trabajo, C son mejoras, D activos líquidos, E activos de trabajo y F gastos de operación en efectivo. Encuentre las productividades marginales para el trabajo y las mejoras.
(**Fuente:** G. Tintner y O. H. Brownlee, Production Functions Derived from Farm Records, American Journal of Agricultural Economics, 26 (1944), 566-571.)

---

9. Suponga que una función de producción está dada por $P = \dfrac{kl}{k+l}$.

a) Determine las funciones de productividad marginal.

b) Demuestre que cuando $k = l$, la suma de las productividades marginales es $\frac{1}{2}$.

---

10. En un estudio sobre el éxito alcanzado por jóvenes graduados con maestría en administración de negocios (MAN), se estimó que para gerentes (contadores, analistas, etc.) la compensación anual z (en dólares) está dada por

$$z = 43\ 960 + 4\ 480x + 3\ 492y,$$

donde x y y es el número de años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir su título de maestría, respectivamente. Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e interprete su resultado.
(**Fuente:** A.G.Weinstein y V. Srinivasen, Predicting Managerial Success of Master of Business Administration (M.B.A.) Graduates, Journal of Aplied Psychology, 59, nm. 2 (1974), 207-212.)

---

11. Encuentre el costo marginal indicado al nivel de producción dado.

a) $C(x,y) = 7x + 0{,}3y^2 + 2y + 900; \quad \frac{\partial C}{\partial y}, \quad x = 20, \quad y = 30.$

b) $C(x,y) = x\sqrt{x+y} + 500; \quad \frac{\partial C}{\partial x}, \quad x = 40, \quad y = 60.$

---

12. Encuentre las funciones de producción marginal $\frac{\partial P}{\partial l}$ y $\frac{\partial P}{\partial k}$, si

a) $P(l,k) = 20lk - 2l^2 - 4k^2 + 800.$

b) $P(l,k) = 1{,}582l^{0{,}192}k^{0{,}764}.$

---

13. En cierta fábrica la producción diaria es $P(k,l) = 120k^{1/3}l^{1/2}$ unidades, donde k denota la inversión de capital medida en unidades de mil, y l es la fuerza laboral medida en hora-trabajador.

a) Halle las funciones de productividad marginal.

b) Si actualmente se invierten 900 000 pesos de capital y todos los días se emplea una fuerza laboral de 1 000 horas-trabajador, determine la variación en la producción cuando se adicionan 1 000 pesos de capital y se mantiene fija la fuerza laboral.

---

14. Después que un nuevo producto se ha lanzado al mercado, su volumen de ventas S (en miles de unidades) está dado por

$$S = \frac{AT + 450}{\sqrt{A + T^2}},$$

donde T es el tiempo (en meses) desde que el producto fue introducido por primera vez y A la cantidad (en cientos de dólares) gastada cada mes en publicidad.

a) Verifique que la derivada parcial del volumen de ventas con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{A^2 - 450T}{(A + T^2)^{3/2}}.$$

b) Use el resultado de la parte *a*) para predecir el número de meses que transcurrirán, antes de que el volumen de ventas empiece a descender, si la cantidad destinada a publicidad se mantiene fija en \$9 000 por mes.

---

15. La función de producción de una empresa está dada por

$$P(L, K) = \frac{36}{100}K^2 - \frac{1}{100}K + \frac{42}{100}L^2 - \frac{2}{100}L^3$$

miles de unidades, donde L es medido en miles de horas-trabajador por semana y K es el monto de capital invertido por semana en miles de UM.

a) Determine las productividades marginales cuando $L = 10$ y $K = 40$.

b) Interprete sus resultados.

---

16. La fórmula del monto compuesto anual está dada por $A = P(1+r)^t$ y se puede interpretar como función de P el capital de inversión, r la tasa anual de interés anual y t los años de inversión.

a) Calcule $\dfrac{\partial A}{\partial P}$, $\dfrac{\partial A}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial A}{\partial t}$.

b) Interprete $\dfrac{\partial A}{\partial P}$.

---

17. En un análisis de la teoría de inventarios sobre la demanda de dinero, Swanson considera la función

$$F(b, C, T, i) = -\frac{bT}{C} + \frac{iC}{2}$$

y determina que

$$\frac{\partial F}{\partial C} = -\frac{bT}{C^2} + \frac{i}{2}.$$

Verifique esta derivada parcial.
(**Fuente:** P. E. Swanson, Integer Constraints on the Inventory Theory of Money Demand, Quarterly Journal of Business and Economics, 23, nm. 1 (1984), 32-37.)

---

18. Se estimó la demanda de dinero en EE.UU. durante el periodo $1929 - 1952$ en

$$M(Y, r) = 0,14Y + 76,03(r - 2)^{-0,84} \qquad (r > 2)$$

donde Y es la renta nacional anual y r es el tipo de interés en porcentaje anual. Halle $\dfrac{\partial M}{\partial Y}$ y $\dfrac{\partial M}{\partial r}$ y estudie sus signos.

---

19. En un análisis sobre publicidad y utilidades, Swales considera una función f dada por

$$R = f(r, a, n) = \frac{r}{1 + a\left(\dfrac{n-1}{2}\right)},$$

donde R es la tasa ajustada de utilidad, r la tasa contable de utilidad, a es una medida de los gastos publicitarios y n el número de años en que la publicidad se deprecia por completo. En su análisis, Swales determina $\dfrac{\partial R}{\partial n}$. Encuentre esta derivada parcial.
(**Fuente:** J. K. Swales, Advertising as an Intangible Asset: Profitability and Entry Barriers: A Comment on Reekie and Bhoyrub, Aplied Economics, 17, nm. 4 (1985), 603-617.)

---

20. En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos obtienen la ecuación

$$r_L = r + D\frac{\partial r}{\partial D} + \frac{\partial C}{\partial D}, \tag{1}$$

donde r es la tasa de interés por depósitos pagados por los bancos comerciales, r_L es la tasa de interés ganado por esos bancos, C es el costo administrativo por transformar los depósitos en activos productivos y D el nivel de los depósitos por ahorros. Christofi y Agapos establecen que

$$r_L = r\left[\frac{1+\eta}{\eta}\right] + \frac{\partial C}{\partial D}, \tag{2}$$

donde $\eta = \dfrac{r/D}{\partial r/\partial D}$ es la elasticidad del depósito con respecto al interés del depósito. Exprese la ecuación (1) en términos de η para verificar la ecuación (2).
(**Fuente:** A. Christofi y A.Agapos,Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification, Review of Business and Economic Research, XX (1984), 39-49.)

---

21. En los siguientes ejercicios, q_A y q_B son funciones de demanda para los productos A y B, respectivamente. En cada caso encuentre $\partial q_A/\partial p_A$, $\partial q_A/\partial p_B$, $\partial q_B/\partial p_A$, $\partial q_B/\partial p_B$ y determine si A y B son competitivos, complementarios o ni uno ni otro.

    a) $q_A = 2020 - 60p_A + 3p_B; \qquad q_B = 800 - 7p_A + 40p_B.$
    b) $q_A = \dfrac{200p_A}{\sqrt{p_A^3 p_B}}; \qquad q_B = \dfrac{50}{\sqrt[3]{p_A^2 p_B^5}}.$
    c) $q_A = e^{-(3p_A - 4p_B)}; \qquad q_B = 3\ln(p_A^2 + 4p_B^4).$
    d) $q_A = 10\sqrt{\dfrac{p_A}{p_B}}; \qquad q_B = 3\sqrt[3]{\dfrac{p_B}{p_A}}.$
    e) $q_A = 250 + \dfrac{50}{2p_A + 3} + 30p_B; \qquad q_B = 300 - 200p_A + \dfrac{450}{p_B + 5}.$
    f) $q_A = \dfrac{8p_B}{2 + p_A^2}; \qquad q_B = \dfrac{3p_A}{1 + p_B^2}.$
    g) $q_A = 200p_A^{-1/2}p_B^{-1/2}; \qquad q_B = 300p_A^{-1/2}p_B^{-3/2}.$
    h) $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B; \qquad q_B = 500 + 4p_A - 20p_B.$

i) $q_A = 20 - p_A - 2p_B$; $\quad q_B = 50 - 2p_A - 3p_B$.

j) $q_A = \dfrac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$; $\quad q_B = \dfrac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}$.

k) $q_A = \dfrac{200\sqrt[3]{p_B}}{p_A}$; $\quad q_B = \dfrac{500}{p_B\sqrt{p_A}}$

l) $q_A = \dfrac{50p_B}{\sqrt[3]{p_A}}$; $\quad q_B = \dfrac{30\sqrt{p_A}}{\sqrt[3]{p_B^2}}$

m) $q_A = \dfrac{300}{\sqrt{p_A p_B}}$; $\quad q_B = \dfrac{200}{\sqrt{p_A^3 p_B}}$

Referencias

[1] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía.* Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[2] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.

[3] R. Larson and B. H. Edwards. *Cálculo 2 de varias variables.* McGraw-Hill, 2010.