DERIVACIÓN PARCIAL IMPLÍCITA Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del primer corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. El documento está basado en ejercicios de los textos [1], [2], [3] y [4]. Para problemas similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

`https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec`

1. Encuentre las derivadas parciales indicadas por el método de diferenciación parcial implícita.

   a) $3x^4 + 4y^2 - 6z^3 = 250$; $\partial z/\partial y$.

   b) $2x^3z - 3y^2 + 4xy - 5z^2 = 20$; $\partial z/\partial x$.

   c) $x^3y^2 - x^2yz = z$; $\partial z/\partial y$.

   d) $x^3 - 4y^2 - z^2 + x^3y^2z^3 = 40$; $\partial z/\partial y$.

   e) $e^{4x} + 3e^{y^2} + xe^{3z^2} = 0$; $\partial z/\partial x$.

   f) $4x^2yz^3 + 4x^2y^4 - \ln z^{3/2} = 0$; $\partial z/\partial x$.

   g) $8 - xy + z^3 - \ln z = 0$; $\partial z/\partial y$.

   h) $\ln(z/y) + y\ln x + e^z = 0$; $\partial z/\partial y$.

   i) $(2z^3 - 5xy^2)e^{\sqrt{8+3y^2}} = 1$; $\partial z/\partial x$.

   j) $x\ln y + y^2z + z^2 = 8$; $\partial z/\partial y$.

   k) $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20$; $\partial z/\partial x$.

   l) $z^3 + 2x^2z^2 - xy = 0$; $\partial z/\partial x$.

   m) $xyz + xy^2z^3 - \ln z^4 = 0$; $\partial z/\partial y$.

   n) $e^{zx} = xyz$; $\partial z/\partial y$.

---

2. En los siguientes ejercicios, evalúe las derivadas parciales indicadas para los valores dados de las variables.

   a) $x^2z + 2xy^2z - 16 = 0$; $\partial z/\partial x$, $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$.

   b) $4xz + 3yz^3 - xy = 0$; $\partial z/\partial y$, $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$.

   c) $xe^{3y^2z} + 4x^2y - 5xyz = 50$; $\partial z/\partial x$, $x = 2$, $y = 3$, $z = 0$.

   d) $y\sqrt{3x^4 + z^2} - 5x^2z^3 + 9z = 0$; $\partial z/\partial x$, $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$.

   e) $\dfrac{3r^3s + t}{st + r^2} = 2r$; $\partial s/\partial t$, $r = 1$, $s = 1$, $t = 1$.

   f) $\dfrac{r^2 + 6t}{3se^r} - 2st = 0$; $\partial r/\partial t$, $r = 0$, $s = 1$, $t = -1$.

   g) $2r^3s^2 = rs^2 + rt^2$; $\partial r/\partial t$, $r = 1$, $s = 1$, $t = 1$.

---

3. Una función de costos conjuntos se define en forma implícita mediante la ecuación

$$c + \sqrt{c} = 10 + q_B\sqrt{7 + q_A^2}$$

   donde c denota el costo total (en dólares) de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B.

   a) Si $q_A = 3$ y $q_B = 5$, encuentre el correspondiente valor de c.

b) Determine los costos marginales con respecto a q_A y q_B cuando $q_A = 3$ y $q_B = 5$.

---

4. Una compañía fabrica dos productos A y B. Suponga que la función de costos conjuntos de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$c + \sqrt{c} = 26 + q_B\sqrt{9 + q_A^2}$$

donde c denota el costo total (en dólares).

a) Aplicando derivación implícita, determine los costos marginales con respecto a q_A y q_B cuando $q_A = 4$, $q_B = 6$ y $c = 49$.

b) Teniendo en cuenta los resultados del inciso anterior, ¿es más conveniente para la compañía producir una unidad adicional de A o de B? Justifique claramente su respuesta.

---

5. En los siguientes ejercicios, encuentre las derivadas parciales indicadas.

a) $f(x, y) = 9x^3y^2 - 10xy$; f_{xy}.

b) $f(x, y) = (x^2 - 3xy + y^2)(x^2 - y^2)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

c) $f(x, y) = 8xe^{-4x^2y}$; f_{yx}.

d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - xy$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$.

e) $f(x, y) = 2 + \sqrt{3x^2 + y^2}$; f_{xy}.

f) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 1}{1 - y^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

---

6. Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$c = (2q_A^2 + 3q_B^3 + 4)^{2/3}$$

y que las funciones de demanda para los productos están dadas por $q_A = 8 - p_A + p_B^2$ y $q_B = 18 + p_A - 11p_B$. Encuentre el valor de $\dfrac{\partial^2 c}{\partial q_B \partial q_A}$ cuando $p_A = 16$ y $p_B = 3$.

---

7. Suponga que el costo c de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B est dado por

$$c = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{\frac{1}{3}}$$

y que las funciones de demanda para los productos estn dadas por

$$q_A = 10 - p_A + p_B^2 \quad y \quad q_B = 20 + p_A - 11p_B.$$

Encuentre el valor de $\dfrac{\partial^2 c}{\partial q_A \partial q_B}$ cuando $p_A = 25$ y $p_B = 4$.

---

8. Verifique que la función dada satisface la ecuación indicada.

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{x^4+4x}{2x^2}z_x + \dfrac{x^4}{2}z_y = 0$; $z(x,y) = x^3 + 3y + 4(1-e^{y/2})$.

b) $-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4y^2 z_x + \dfrac{4y^2-1}{y}z_y = 0$; $z(x,y) = x + \dfrac{1}{2}y^2$.

c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{4x^2-1}{x}z_x - 4x^2 z_y = 0$; $z(x,y) = x^2 + 2y + \dfrac{e^{-4y}-1}{2}$.

d) $y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4y^2 z_x + \dfrac{1+4y^2}{y}z_y = 0$; $z(x,y) = 2x - y^2 + \dfrac{e^{-4x}-1}{2}$.

e) $-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z(x,y) = \dfrac{x+y}{2}$.

f) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

g) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - c^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; $z(x,y) = (x-cy)^2 + (x+cy)^3$.

h) $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

i) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z$; $z(x,y) = ye^x - xe^y$.

j) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z(x,y) = xe^{y/x}$.

---

9. En cierta fábrica, la producción es $P(k,l) = 120k^{1/2}l^{1/3}$ unidades, donde k denota la inversión de capital (medida en unidades de mil) y l es la fuerza laboral (medida en horas-trabajador).

   a) Determine el signo de la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial^2 P}{\partial l^2}$ y dé una interpretación económica.

   b) Determine el signo de la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}$ y dé una interpretación económica.

Referencias

[1] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía.* Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[2] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.

[3] R. Larson and B. H. Edwards. *Cálculo 2 de varias variables.* McGraw-Hill, 2010.

[4] C. Pita Ruiz. *Cálculo Vectorial.* PRENTICE HALL, primera edición, 1995.