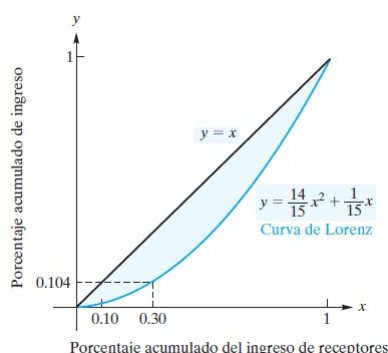


APLICACIONES ECONÓMICAS DE LA INTEGRACIÓN

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del segundo corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. La mayoría de los ejercicios son tomados de los textos [1] y [2]. Para ejercicios similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

<https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec>

1. La *curva de Lorenz* se utiliza para estudiar las distribuciones de ingresos. Si x es el porcentaje acumulado de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y y es el porcentaje acumulado de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta $y = x$ en la figura de abajo, donde x y y se expresan como decimales. Por ejemplo, 10 % de la gente recibe 10 % de los ingresos totales, 20 % de la gente recibe 20 % de los ingresos, etcétera. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorenz definida por $y = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x$.



Observe, por ejemplo, que 30 % de la gente sólo recibe 10.4 % de los ingresos totales. El grado de desviación de la igualdad se mide por el *coeficiente de desigualdad* para una curva de Lorenz. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal. Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorenz que se acaba de definir.

2. Encuentre el coeficiente de desigualdad, como en el problema anterior, para la curva de Lorenz definida por $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$.

3. En los siguientes problemas determine el índice de Gini de la curva de Lorenz.

a) $L(x) = x^2$

c) $L(x) = 0,7x^2 + 0,3x$

e) $L(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$

b) $L(x) = x^3$

d) $L(x) = 0,55x^2 + 0,45x$

f) $L(x) = \frac{2}{3}x^{3,7} + \frac{1}{3}x$

4. En cierto Estado se determina que la distribución del ingreso para abogados está dada por la curva de Lorenz $L_1(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$ en tanto que para cirujanos está dada por $L_2(x) = \frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{8}x$. Calcule el índice de Gini para cada curva de Lorenz. ¿Cuál profesión tiene la distribución del ingreso más equitativa?
-

5. En los siguientes problemas, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado.

a) $p = 22 - 0,8q; p = 6 + 1,2q$

g) $q = 400 - p^2; p = \frac{q}{60} + 5$

b) $p = 2200 - q^2; p = 400 + q^2$

h) $(p + 10)(q + 20) = 1000; q - 4p + 10 = 0$

c) $p = \frac{50}{q+5}; p = \frac{q}{10} + 4,5$

i) $p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2+3600}}; p = 10 \ln(q + 20) - 26$

d) $p = 400 - q^2; p = 20q + 100$

j) $p = 0,01q^2 - 1,1q + 30; p = 0,01q^2 + 8$

e) $q = 100(10 - 2p); q = 50(2p - 1)$

k) $p = \sqrt{245 - 2q}; p = 5 + q$

f) $q = \sqrt{100 - p}; q = \frac{p}{2} - 10$

l) $p = \frac{16}{q+2} - 3; p = \frac{1}{3}(q + 1)$

6. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 10\sqrt{100 - p}.$$

Calcule el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de \$84.

7. La función de oferta para un producto está dada por la siguiente tabla, donde p es el precio por unidad (en dólares) en el cual se suministran q unidades al mercado:

q	0	10	20	30	40	50
p	25	49	59	71	80	94

Use la regla del trapecio para estimar el excedente de los productores si el precio de venta es de \$80.

8. Suponga que cuando cierta máquina industrial tiene t años, genera ingreso a una tasa $R'(t) = 6\,025 - 8t^2$ dólares por año y que los costos de operación y servicio correspondientes a la máquina se acumulan a una tasa $C''(t) = 4\,681 + 13t^2$ dólares por año.

a) ¿Cuál es la vida útil de esta máquina?

b) Calcule el ingreso neto generado por la máquina durante su vida útil.

9. Se estima que dentro de t semanas, las contribuciones en respuesta a una campaña de recaudación de fondos se recibirán a una tasa de $R'(t) = 5\,000e^{-0,2t}$ dólares por semana, en tanto se espera que los gastos de campaña se acumulen a una tasa de \$676 por semana.

- a) ¿Durante cuántas semanas excede la tasa del ingreso a la tasa del costo?
- b) ¿Qué ingresos netos generará la campaña durante el periodo determinado en el inciso a)?
-

10. Se transfiere dinero continuamente a una cuenta a una tasa constante de \$2 400 por año. La cuenta gana interés a una tasa anual de 6 %, capitalizado continuamente. ¿Cuánto habrá al cabo de 5 años?

11. A la edad de 25 años, Tom empieza a depositar anualmente \$2 500 en una cuenta individual de retiro que paga interés a una tasa anual de 5 % capitalizado continuamente. Suponiendo que sus pagos se hacen como un flujo continuo de ingresos, ¿cuánto dinero habrá en su cuenta si se jubila a la edad de 60 años? ¿Cuánto habrá si se jubila a la edad de 65 años?

12. Cuando Sue tiene 30 años empieza a depositar \$2 000 en un fondo de bonos que paga 8 % de interés anual capitalizado continuamente. Suponiendo que sus depósitos se hacen como un flujo continuo de ingresos, ¿cuánto dinero habrá en su cuenta si se jubila a los 55 años de edad?

13. Una inversión generará ingresos continuamente a una tasa constante de \$1 200 por año durante 5 años. Si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija a 5 % capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor presente de la inversión?

14. El gerente de una cadena nacional de comida rápida está vendiendo una franquicia de 10 años en Cleveland, Ohio. La experiencia pasada en localidades similares sugiere que dentro de t años la franquicia generará ingresos a una tasa de $f(t) = \$10\,000$ por año. Si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija a 4 % capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor presente de la franquicia?

15. Adam trata de elegir entre dos oportunidades distintas de inversión. La primera costará \$50 000 y se espera que produzca ingresos a una tasa continua de \$15 000 por año. La segunda costará \$30 000 y se espera que genere ingresos a una tasa de \$9 000 por año. Si la tasa de interés prevaleciente permanece fija a 6 % anual capitalizado continuamente, ¿cuál inversión generará más ingresos netos durante los próximos 5 años?

16. Kevin gasta \$4 000 en una inversión que genera un flujo continuo de ingresos a una tasa de $f_1(t) = 3\,000$ dólares por año. Su amiga Molly hace una inversión distinta que también genera ingresos continuamente, pero a una tasa de $f_2(t) = 2\,000e^{0.004t}$ dólares por año. La pareja descubre que sus inversiones generan exactamente los mismos ingresos netos durante un periodo de 4 años. Si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija a 5 % capitalizado continuamente, ¿cuánto pagó Molly por su inversión?

17. Encuentre el valor presente, al dólar más cercano, de una anualidad continua con una tasa de interés anual de r durante T años, si el pago en el tiempo t es a la tasa anual de $f(t)$ dólares, dado que

a) $r = 0,04 \quad T = 9 \quad f(t) = 1000$

b) $r = 0,06 \quad T = 10 \quad f(t) = 500t$

18. Encuentre el monto acumulado, al dólar más cercano, de una anualidad continua a una tasa anual de r durante T años si el pago en el tiempo t es a una tasa anual de $f(t)$ dólares, dado que

a) $r = 0,06 \quad T = 10 \quad f(t) = 400$

b) $r = 0,04 \quad T = 5 \quad f(t) = 40t$

19. Durante los próximos 5 años, las utilidades de un negocio en el tiempo t se estiman igual a 50 000t dólares por año. El negocio se va a vender a un precio igual al valor presente de esas futuras utilidades. A la decena de dólares más cercana, ¿a qué precio, debe venderse el negocio, si el interés se compone continuamente a una tasa anual del 7%?
-

20. Encuentre el valor promedio de la función en el intervalo dado.

a) $f(x) = x^2; \quad [-1, 3]$

e) $f(t) = 2t^5; \quad [-3, 3]$

i) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}; \quad [0, \ln 2]$

b) $f(x) = 3x - 1; \quad [1, 2]$

f) $f(t) = t\sqrt{t^2 + 9}; \quad [0, 4]$

j) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+6}; \quad [-1, 1]$

c) $f(x) = 2 - 3x^2; \quad [-1, 2]$

g) $f(x) = 6\sqrt{x}; \quad [1, 9]$

k) $f(x) = e^{-x}(4 - e^{2x}); \quad [-1, 1]$

d) $f(x) = x^2 + x + 1; \quad [1, 3]$

h) $f(x) = 5/x^2; \quad [1, 3]$

l) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad [0, \ln 3]$

21. La utilidad (en dólares) de un negocio está dada por

$$U = 369q - 2,1q^2 - 400,$$

donde q es el número de unidades del producto vendido. Encuentre la utilidad promedio sobre el intervalo de $q = 0$ a $q = 100$.

22. Suponga que el costo de producir q unidades de cierto artículo está dado por

$$C = 4\,000 + 10q + 0,1q^2.$$

Encuentre el costo promedio en el intervalo de $q = 100$ a $q = 500$.

23. Una inversión de \$3 000 gana interés a una tasa anual de 5% compuesto continuamente. Después de t años, su valor S está dado por $S = 3\,000e^{0,05t}$. Encuentre el valor promedio de una inversión a dos años.
-

24. Encuentre el valor promedio de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

en el intervalo $[0, 1]$ mediante una técnica de integración aproximada. Redondee su respuesta a dos decimales.

25. Unos registros indican que t meses después del inicio del año, el precio de la carne molida en los supermercados locales fue de $P(t) = 0,09t^2 - 0,2t + 1,6$ dólares por libra. ¿Cuál fue el precio promedio de la carne molida durante los 3 primeros meses del año?

26. Tom invierte \$5 000 en una cuenta que paga 6 % capitalizado continuamente. ¿Cuál es el valor promedio de su inversión durante los próximos 10 años?

27. Suponga que dentro de t años, un plan de inversión generará utilidades a una tasa $P'_1(t) = 100 + t^2$ cientos de dólares por año, en tanto que una segunda inversión generará utilidades a una tasa de $P'_2(t) = 220 + 2t$ cientos de dólares por año.

- a) ¿Durante cuántos años la tasa de rentabilidad de la segunda inversión excede a la de la primera?
 - b) Calcule el exceso neto de utilidad, suponiendo que invierte en el segundo plan durante el periodo determinado en el inciso a).
-

28. Responda las preguntas del problema anterior para dos inversiones con tasas de rentabilidad respectivas.

- a) $P'_1(t) = 130 + t^2$ cientos de dólares por año y $P'_2(t) = 306 + 5t$ cientos de dólares por año.
 - b) $P'_1(t) = 60e^{0,12t}$ miles de dólares por año y $P'_2(t) = 160e^{0,08t}$ miles de dólares por año.
 - c) $P'_1(t) = 90e^{0,1t}$ miles de dólares por año y $P'_2(t) = 140e^{0,07t}$ miles de dólares por año.
-

29. Después de t horas en el trabajo, un trabajador de una fábrica produce $Q'_1(t) = 60 - 2(t - 1)^2$ unidades por hora, en tanto que un segundo trabajador produce $Q'_2(t) = 50 - 5t$ unidades por hora.

- a) Si ambos llegan al trabajo a las 8:00 a.m., ¿cuántas unidades más habrá producido el primer trabajador que el segundo al mediodía?
 - b) Interprete la respuesta del inciso a) como el área entre dos curvas.
-

30. En cierta fábrica, el costo marginal es $3(q - 4)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades.

- a) Exprese el costo total de producción en función de los gastos indirectos (el costo de producir 0 unidades) y el número de unidades producidas.
- b) ¿Cuál es el costo de producir 14 unidades si el gasto indirecto es de \$436?
-

31. El valor de reventa de una cierta máquina industrial disminuye a una tasa que depende de su edad. Cuando la máquina tiene t años, la tasa a la cual cambia su valor es $-960e^{-t/5}$ dólares por año.
- a) Exprese el valor de la máquina en términos de su edad y de su valor inicial.
- b) Si originalmente la máquina valía \$5 200, ¿cuánto valdrá cuando tenga 10 años?
-

32. Cierta pozo petrolero que produce 400 barriles de crudo por mes se secará en 2 años. El precio del crudo actualmente es de \$25 por barril y se espera que aumente a una tasa constante de 3 centavos por barril al mes. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso total futuro del pozo?
-

33. Se estima que dentro de t días el cultivo de un granjero crecerá a una tasa de $0,3t^2 + 0,6t + 1$ bushels por día. ¿Cuánto crecerá el valor del cultivo durante los próximos 5 días si el precio en el mercado permanece fijo a \$3 por bushel?
-

34. Se estima que la demanda del producto de un fabricante crece exponencialmente a una tasa de 2% anual. Si la demanda actual es de 5 000 unidades por año, y si el precio permanece fijo a \$400 por unidad, ¿cuál es el ingreso que recibirá el fabricante por la venta del producto durante los próximos 2 años?

Referencias

- [1] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía*. Pearson, décimo tercera edición, 2015.
- [2] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales*. McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.