

ECUACIONES DIFERENCIALES

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca toda la temática del cuarto corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. La mayoría de los ejercicios son tomados de los textos [1] y [2]. Para ejercicios similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

<https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec>

1. Verifique que la función dada es solución de la ecuación diferencial indicada.

- a) $y'' + 3y' + 2y = 6$; $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3$
- b) $y'' + y' - 6y = 2x$; $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}$
- c) $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$; $y = C_1e^{4x} + C_2e^x - \frac{8}{3}xe^x$
- d) $y'' - 16y = 2e^{4x}$; $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{4}xe^{4x}$
- e) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$; $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + x^2 - 4x + \frac{7}{2}$
- f) $y'' - 2y' + y = e^x$; $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$
- g) $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$; $y = C_1e^{5x} + C_2 - \frac{1}{10}x^4 + \frac{14}{75}x^3 + \frac{53}{250}x^2 - \frac{697}{625}x$

2. Compruebe que la ecuación diferencial dada es de variables separables. Encuentre la solución general.

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{dy}{dx} = xe^{x-y}$ | l) $y \ln x \frac{dx}{dy} = \left(\frac{y+1}{x}\right)^2$ |
| b) $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2$ | m) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$ |
| c) $dx + e^{3y}dy = 0$ | n) $(yx^2 - y) dy + (y+1)^2 dx = 0$ |
| d) $\frac{dy}{dt} = y \ln \sqrt{t}$ | ñ) $\frac{y dy}{x dx} = (1+x^2)^{-1/2}(1+y^2)^{1/2}$ |
| e) $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}(x-2)^9$ | o) $2\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = \frac{2x}{y}$ |
| f) $\frac{dy}{dt} = \frac{\ln t}{\ln y}$ | p) $(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$ |
| g) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{(2x-5)^6}$ | q) $x(1+y^2)^{1/2} dx = y(1+x^2)^{1/2} dy$ |
| h) $(1+e^x)\frac{dy}{dx} + e^xy = 0$ | r) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$ |
| i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{1+x}$ | s) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$ |
| j) $e^xy dy - (e^{-y} + e^{-2x-y}) dx = 0$ | t) $\frac{dy}{dx} = \frac{-xe^x\sqrt{1-y^2}}{2y}$ |
| k) $(4y+yx^2) dy - (2x+xy^2) dx = 0$ | u) $(e^x + e^{-x})\frac{dy}{dx} = y^2e^x$ |

3. Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial que satisfaga la condición indicada.

a) $\frac{dy}{dx} = e^{5x}; \quad y(0) = 1$

h) $\frac{dx}{dt} = xt\sqrt{t+1}; \quad x(0) = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}; \quad y(2) = 3$

i) $(3x^2 + 2)^3 \frac{dy}{dx} - xy^2 = 0; \quad y(0) = \frac{3}{2}$

c) $\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4-x}; \quad y(4) = 2$

j) $\frac{dy}{dx} + x^3y = 0; \quad y(0) = e$

d) $\frac{dy}{dt} = \frac{y+1}{t(y-1)}; \quad y(1) = 2$

k) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2-1}; \quad y(2) = 2$

e) $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 3x^2 - 2; \quad y(1) = 4$

l) $x^2 \frac{dy}{dx} = y - xy; \quad y(-1) = -1$

f) $\frac{dy}{dx} = 4x^3y^2; \quad y(1) = 2$

m) $\frac{dy}{dx} + 2y = 1; \quad y(0) = \frac{5}{2}$

g) $\frac{dy}{dx} = xe^{y-x^2}; \quad y(1) = 0$

n) $x \frac{dy}{dx} = y^2 - y; \quad y(0) = 1$

4. Determine si la ecuación diferencial es lineal. Explique las razones.

a) $x^3y' + xy = e^x + 1$

e) $2\frac{dy}{dx} = 4\frac{y}{x} - \frac{x}{y^3}$

b) $2xy - y' \ln x = y$

f) $\sqrt{y} \frac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1$

c) $\frac{1-y'}{y} = 3x$

g) $e^{-x}(y' - y) = y^2$

d) $y' + y\sqrt{x^2+1} = xy^2$

h) $6(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1)$

5. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

a) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

g) $x \frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

m) $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{1+2t} = 5$

b) $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2$

h) $x \frac{dy}{dx} + (3x+1)y = e^{-3x}$

n) $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$

c) $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1$

i) $x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x + \ln x$

ñ) $(x+1) \frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$

d) $\frac{dy}{dx} = 2y + x^2 + 5$

j) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$

o) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = \frac{2}{x+1}$

e) $(1+e^x) \frac{dy}{dx} + e^xy = 0$

k) $(x+2)^2 \frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

p) $x \frac{dy}{dx} + 2y = 3xe^{x^3}$

f) $(1-x^3) \frac{dy}{dx} = 3x^2y$

l) $(x^2-1) \frac{dy}{dx} + 2y = (x+1)^2$

q) $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = 4x$

6. Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial de primer orden, que satisfaga la condición dada.

a) $y' + 2xy = x^3; \quad y(0) = 3$

g) $y' - 2y = x^2 + 5; \quad y(0) = 1/4$

b) $\frac{dy}{dx} = 2y + x(e^{3x} - e^{2x}); \quad y(0) = 2$

h) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}; \quad y(1) = -2$

c) $y \frac{dx}{dy} - x = 2y^2; \quad x(1) = 5$

i) $(x^2 - 9) \frac{dy}{dx} + xy = 0; \quad y(5) = 1$

d) $\frac{dQ}{dx} = 5x^4Q; \quad Q(0) = -7$

j) $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x}y = x; \quad y(0) = 2$

e) $(x+1) \frac{dy}{dx} + y = \ln x; \quad y(1) = 10$

k) $\frac{dy}{dx} + \frac{x+2}{x+1}y = \frac{2xe^{-x}}{x+1}; \quad y(0) = 5$

f) $x(x-2) \frac{dy}{dx} + 2y = 0; \quad y(3) = 6$

l) $y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = \frac{e^{-3x}}{x}; \quad y(1) = e^{-3}$

7. Encuentre una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $xy' + a(x)y = b(x)$ para la cual $y = x^3 + cx^{-3}$ es la solución general.

8. El precio de un apartamento es actualmente de \$400 000. Suponga que se estima que después de t meses, el precio $p(t)$ aumentará a razón de $0,02p(t) + 100t$ dólares por mes. ¿Cuánto costará el apartamento dentro de 15 meses?

9. El precio de cierta mercancía es actualmente de \$4 por unidad. Se estima que dentro de t semanas, el precio $p(t)$ estará aumentando a razón de $0,06p(t) + e^{0,1t}$ centavos por semana. ¿Cuánto costará la mercancía en 8 semanas?

10. Ana deposita \$20 000 en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 4 % anual, capitalizado continuamente. Ella planea retirar \$4 000 por año.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.

b) ¿Cuánto tardará la cuenta en agotarse?

11. Fernando planea hacer un depósito inicial en una cuenta que gana 5 % de interés anual, capitalizado continuamente, y luego hacer retiros de \$8 000 por año. ¿Cuánto debe depositar si su cuenta tarda 10 años en agotarse?

-
12. Gabriela está ahorrando para hacer un viaje de \$12 000 a Europa dentro de 5 años. Sus padres desean ayudar haciendo un depósito total de D dólares en una cuenta de ahorros que gana 8 % de interés anual, capitalizado continuamente. Gabriela planea sumar a esta cantidad haciendo depósitos frecuentes en la cuenta que totalicen \$400 por año. ¿Cuál debe ser D para que ella cumpla su objetivo?
-
13. Laura guarda dinero en una cuenta de ahorros, ella hace depósitos regulares anuales de \$14 000. Si la tasa prevaleciente de interés permanece constante a 7 % capitalizado continuamente, ¿cuánto tendrá ella en su cuenta dentro de 30 años?
-
14. David considera que necesitará \$1'200.000 para retirarse. Si la tasa prevaleciente de interés en un fondo de retiro es 10 % capitalizado continuamente, ¿de qué monto deben ser sus depósitos regulares anuales en el fondo para que pueda retirarse en 40 años?
-
15. Adele tiene un salario inicial de \$60 000 y piensa que con aumentos de salario y bonos, su compensación aumentará a una razón anual promedio de 7 %. Ella regularmente deposita 12 % de su salario en una cuenta de ahorros que gana interés a una tasa de 3 % anual capitalizado continuamente, y retira \$4 500 por año para gastos.
- a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para la cantidad de dinero $V(t)$ en la cuenta después de t años.
 - b) ¿Cuánto tendrá Adele en su cuenta cuando se retire dentro de 35 años?
-
16. Jessica tiene actualmente \$15 000 invertidos en un fondo de mercado de dinero que gana 3 % anual, capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y ella decide transferir continuamente 20 % de su cuenta a un fondo accionario que gana 8 % anual. ¿Cuánto habrá en cada cuenta en 4 años a partir de ahora?
-
17. Elvin tiene actualmente \$40 000 invertidos en una cuenta de ahorros que gana 3 % anual capitalizado continuamente. Las condiciones de mercado están mejorando y él decide transferir continuamente 15 % de su cuenta a un fondo de acciones que gana 12 % anual. Él también retira \$5 000 al año de su cuenta de ahorros para gastos.
- a) Plantee y resuelva una pareja de ecuaciones diferenciales acopladas para determinar la cantidad de dinero en cada cuenta dentro de t años.
 - b) ¿Cuánto tardará la cuenta de ahorros en agotarse? ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta de acciones es ese momento?

18. Determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

a) $x dx + y dy = 0$

b) $(x^3 + y) dx - x dy = 0$

c) $(2x + e^y) dx + xe^y dy = 0$

d) $2xy dx + (x^2 + 4y) dy = 0$

e) $(2x - 1) dx + (3y + 7) dy = 0$

f) $(2x + y) dx - (x + 6y) dy = 0$

g) $(2x + y) dx + (x - 2y) dy = 0$

h) $(3x^2 - 2xy) dx + (4y^3 - x^2 + 3) dy = 0$

i) $(3x^2 + 2xy^2) dx + (3y^2 + 2x^2y) dy = 0$

j) $(ye^x + e^y) dx + (e^x + xe^y) dy = 0$

k) $(5x + 4y) dx + (4x - 8y^3) dy = 0$

l) $(2xy^2 - 3) dx + (2x^2y + 4) dy = 0$

m) $(x^2 - y^2) dx + (x^2 - 2xy) dy = 0$

n) $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right) dx = (1 - \ln x) dy$

$\tilde{n}$) $(x^3 + y^3) dx + 3xy^2 dy = 0$

o) $(x + y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1) dy = 0$

p) $(e^x + y) dx + (2 + x + ye^y) dy = 0$

q) $(4y + 2t - 5) dt + (6y + 4t - 1) dy = 0$

r) $(y/x + 6x) dx + (1 + x^2) dy = 0$

s) $(ye^{xy} + y^2)dx + (xe^{xy} + 2xy)dy = 0$

19. Halle la solución general de la ecuación diferencial dada, en caso de que sea exacta.

a) $(3x^2y + e^y) dx + (x^3 + xe^y - 2y) dy = 0$

b) $(y \ln y - e^{-xy}) dx + \left(\frac{1}{y} + x \ln y\right) dy = 0$

c) $\left(\frac{y}{x} + \ln y\right) dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x\right) dy = 0$

d) $(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4) dx + 2xy(10y^2 - 3x^2) dy = 0$

e) $\frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy = 0$

f) $\left(xe^x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

g) $\left[\ln(x - y) + \frac{x + y}{x - y}\right]dx + \left[\ln(x - y) - \frac{x + y}{x - y}\right]dy = 0$

20. Determine el valor de k para el que la ecuación diferencial es exacta.

a) $(y^3 + kxy^4 - 2x) dx + (3xy^2 + 20x^2y^3) dy = 0$

b) $(2xy + 3x^2y^2 - 2y^3)dx - (kxy^2 - 2x^3y - x^2)dy = 0$

c) $(4e^x - 6x^5 \ln x + 3\sqrt[5]{x^2} - y)dx + (kx + 4e^y \ln y)dy = 0$

d) $\left(ky^2e^{4x} - \frac{y^2}{2x} - 3xy^4\right)dx + (8ye^{4x} - y \ln x - 6x^2y^3)dy = 0$

e) $\left(4x^2e^y + x \ln y - 2y + \frac{x}{e^x \ln x}\right)dx + \left(\frac{4}{3}x^3e^y + k\frac{x^2}{y} - 2x\right)dy = 0$

21. Halle las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tal que cada ecuación diferencial sea exacta.

a) $M(x, y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right) dy = 0$

c) $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2y}\right) dx + N(x, y)dy = 0$

b) $\left(x^{-1/2}y^{1/2} + \frac{x}{x^2 + y}\right) dx + N(x, y)dy = 0$

d) $M(x, y)dx + \left(\frac{y^2 - 3x^2}{y^4} + \ln y\right) dy = 0$

22. Solucione la ecuación diferencial dada a continuación determinando un factor integrante.

a) $y(xy + 1) dx - x dy = 0$

i) $xy dx + (2x^2 + 3y^2 - 20) dy = 0$

b) $(x + 2y) dx - x dy = 0$

j) $(2y^2 + 3x) dx + 2xy dy = 0$

c) $(1 + xy) dx + x\left(\frac{1}{y} + x\right) dy = 0$

k) $y(x + y + 1) dx + (x + 2y) dy = 0$

d) $y(1 + y^3) dx + x(y^3 - 2) dy = 0$

l) $6xy dx + (4y + 9x^2) dy = 0$

e) $(10 - 6y + e^{-3x}) dx - 2 dy = 0$

m) $(10 - 6y + e^{-3x}) dx - 2 dy = 0$

f) $(2xy + y^4) dx + (3x^2 + 6xy^3) dy = 0$

n) $x dx + (x^2y + 4y) dy = 0$

g) $\left(\frac{y}{x^2} + 2\right) dx + \frac{1}{x}\left[1 + \ln(xy)\right] dy = 0$

$\tilde{n}$) $(x^2 + y^2 - 5) dx = (y + xy) dy$

h) $(y + x + 2) dx + dy = 0$

o) $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$

Referencias

- [1] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales*. McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.
- [2] D. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning, novena edición, 2009.