Departamento de Matemáticas y Estadística
Taller de preparación para el Parcial I
Cálculo III (ANEC)

INTEGRACIÓN APROXIMADA

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del primer corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. La mayoría de los ejercicios son tomados de los textos [1], [2] y [3]. Para ejercicios similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

`https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec`

1. Use la regla del trapecio o la regla de Simpson (de acuerdo con la especificación dada) y el valor de n para estimar las siguientes integrales.

   a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{180}{1+x^4}dx,$ regla del trapecio, $n=6$

   b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{180}{1+x^4}dx,$ regla de Simpson, $n=6$

   c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^4}dx,$ regla del trapecio, $n=5$

   d) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3dx,$ regla de Simpson, $n=4$

   e) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^3},$ regla de Simpson, $n=4$

   f) $\displaystyle\int_{2}^{4} \sqrt{100+x^2}dx,$ regla del trapecio, $n=5$

   g) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{x}{x+1}dx,$ regla del trapecio, $n=4$

   h) $\displaystyle\int_{2}^{10} \frac{x^5}{\ln x}dx,$ regla de Simpson, $n=6$

   i) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{2}{\sqrt{1+x}}dx,$ regla de Simpson, $n=4$

   j) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx,$ regla de Simpson, $n=4$

   k) $\displaystyle\int_{0}^{2} e^{x^2}dx,$ regla del trapecio, $n=10$

   l) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{x^2-1}dx,$ regla de Simpson, $n=4$

---

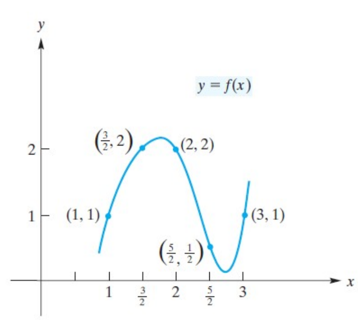
2. Suponga que la gráfica de una función continua f, donde $f(x) \geq 0$, contiene los puntos dados abajo. Use la regla de Simpson y todos los puntos dados para aproximar el área entre la gráfica y el eje x en el intervalo dado.

   a) (1, 0.3), (2, 0.5), (3, 1.3), (4, 0.9), (5, 0.6); [1, 5].

   b) (2, 0), (2.5, 7), (3, 9), (3.5, 12), (4, 14), (4.5, 16), (5, 18); [2, 5].

---

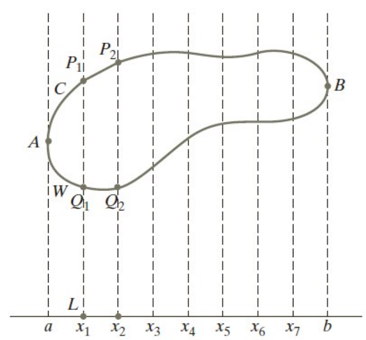
3. Con ayuda de la información dada en la siguiente figura, estime $\int_1^3 f(x)dx$ por medio de la regla de Simpson.



4. Use la regla de Simpson para aproximar el ingreso total recibido por la producción y venta de 80 unidades de un producto, si los valores de la función de ingreso marginal dr/dq son los siguientes:

q (unidades)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$\frac{dr}{dq}$ ($ por unidad)	10	9	8.5	8	8.5	7.5	7	6.5	7

5. Lesley Griffith, quien ha tomado una clase de matemáticas aplicadas al comercio, quiere determinar el área de la superficie de su piscina que tiene forma irregular y curva. Hay una valla recta que rodea la piscina. Lesley marca los puntos a y b en la valla, tal como se muestra en la figura de abajo. Observa que la distancia de a a b mide 8 m y subdivide el intervalo en ocho subintervalos iguales, señalando los puntos resultantes de la cerca como $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ y x_7. Lesley (L) se sitúa en el punto x_1, sostiene una cinta métrica y le pide a su amigo Chester (C) que tome el otro extremo de la cinta y lo lleve al punto P_1 situado en el lado más alejado de la piscina. Luego, Lesley pide a su amiga Willamina (W) que se sitúe en el punto Q_1 en el lado cercano de la piscina y anote la distancia que marca la cinta métrica.



Después, Lesley se traslada al punto x_2 y los tres amigos repiten el procedimiento. Hacen esto para cada uno de los puntos restantes del x_3 al x_7. Lesley tabula sus mediciones en la tabla siguiente:

Distancia a lo largo de la valla (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Distancia a través de la piscina (m)	0	3	4	3	3	2	2	2	0

Lesley dice que ahora la regla de Simpson le permitirá aproximar el área de la piscina como

$$\frac{1}{3}[4(3) + 2(4) + 4(3) + 2(3) + 4(2) + 2(2) + 4(2)] = \frac{58}{3}$$

metros cuadrados. Chester dice que no es así como recuerda la regla de Simpson. Willamina piensa que faltan algunos términos, pero Chester se aburre y se va a nadar. ¿Es correcto el cálculo de Lesley? Explique su respuesta.

6. Un fabricante estimó su costo marginal (CM) y su ingreso marginal (IM) para varios niveles de producción (q). Dichas estimaciones se muestran en la siguiente tabla:

q (unidades)	0	20	40	60	80	100
CM ($ por unidad)	260	250	240	200	240	250
IM ($ por unidad)	410	350	300	250	270	250

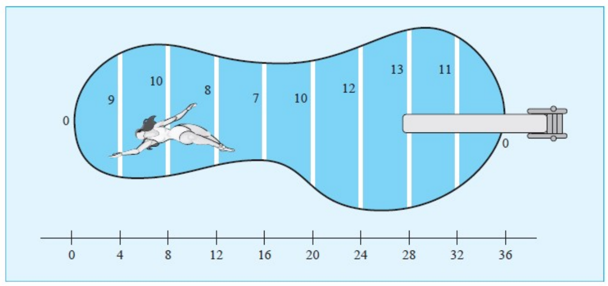
a) Con la regla del trapecio, estime los costos totales variables de producción para 100 unidades.

b) Usando la regla del trapecio, estime el ingreso total en la venta de 100 unidades.

c) Si se supone que la utilidad máxima ocurre cuando IM=CM (esto es, cuando $q = 100$), estime la utilidad máxima si los costos fijos son de \$2 000.

---

7. Jack necesita saber el área de su piscina para comprarle una cubierta, pero esto es difícil debido a la forma irregular de la piscina. Suponga que Jack hace las mediciones que se ilustran en la figura de abajo a intervalos de 4 pies a lo largo de la base de la piscina (todas las medidas son en pies). ¿Cómo puede usar la regla de los trapecios para estimar el área?



---

8. (Valor presente de una franquicia) La administración de una cadena nacional de restaurantes está vendiendo una franquicia de 5 años para operar su más reciente negocio en Tulare, California. La experiencia anterior en localidades semejantes sugiere que dentro de t años la franquicia estará generando utilidades a razón de $f(t) = 12\ 000\sqrt{t}$ dólares por año. Suponga que la tasa prevaleciente de interés anual será fija durante los siguientes 5 años al 5 % capitalizado en forma continua. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar el valor presente de la franquicia. (En [3, p. 417] está la fórmula del *valor presente de un flujo de ingresos*).

---

9. (Valor futuro de una inversión) Marc tiene una pequeña inversión que le da un flujo variable de ingresos, que es depositado en forma continua en una cuenta que gana interés a una tasa anual de 4 % capitalizado continuamente. Él revisa el flujo mensual de la inversión el primer día de cada mes durante un periodo de 1 año, y obtiene los resultados de la tabla siguiente.

Mes	**Ene**	**Mar**	**May**	**Jul**	**Sep**	**Nov**	**Ene**
Flujo de ingreso	\$437	\$357	\$615	\$510	\$415	\$550	\$593

Por ejemplo, el ingreso es depositado en la cuenta a razón de \$615 al mes el 1 de mayo, pero 2 meses después, la tasa del flujo es de sólo \$510 por mes. Use esta información junto con la regla de Simpson para estimar el valor futuro del flujo de ingreso durante este periodo de 1 año. (*Sugerencia:* Ver [3, Ejemplo 5.5.2]).

---

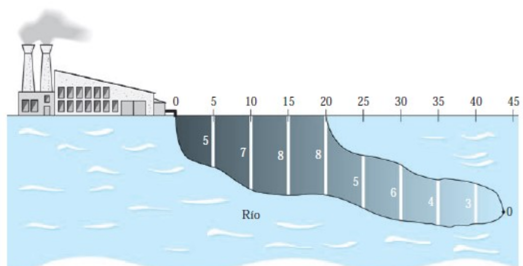
10. Por lo general, cuando se mide el rendimiento cardiaco (ver [3, Ejemplo 5.6.4]) los médicos no tienen una fórmula específica, $C(t)$, para calcular la concentración de colorante que pasa por el corazón de un paciente. En lugar de esto, se usan métodos de análisis de datos. Suponga que 5 mg de colorante se inyectaron a cierto paciente en una vena cerca del corazón y que se tomaron mediciones cada 5 segundos en un periodo de 30 segundos, obteniéndose los siguientes datos:

Tiempo t (segundos)	0	5	10	15	20	25	30
Flujo de ingreso	0	10	36	35	15	12	8

Use la regla de Simpson para estimar la integral $\int_0^{30} C(t)dt$. Con base en este resultado, ¿cuál es el rendimiento cardiaco aproximado del paciente?

---

11. Una planta industrial descarga contaminante en un río. El contaminante se extiende cuando es llevado corriente abajo por el río y, 3 horas más tarde, el derrame tiene la forma que se ve en la siguiente figura. Las mediciones (en pies) en el derrame se hacen a intervalos de 5 pies, como se indica en la figura. Use esta información junto con la regla de los trapecios para estimar el área del derrame.



---

12. El primer día de cada mes, el gerente de una pequeña compañía estima el porcentaje al que espera aumenten las utilidades durante ese mes. Los resultados se citan en la siguiente tabla para los primeros 6 meses del año; en ésta, $P'(t)$ es el porcentaje de crecimiento de utilidades, en miles de dólares por mes, esperados durante el t-ésimo mes ($t = 1$ para enero, $t = 6$ para junio). Use esta información junto con la regla de los trapecios para estimar la utilidad total obtenida por la compañía durante este periodo de 6 meses (enero a junio).

t **(mes)**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2 % de utilidad $P'(t)$	0.65	0.43	0.72	0.81	1.02	0.97

---

13. (Superávit de consumidores) Un economista que estudia la demanda de cierta mercancía reúne los datos en la siguiente tabla; ésta da el número de unidades de la mercancía, q (en miles), que serán demandadas (vendidas) a un precio de p dólares por unidad. Use esta información junto con la regla de Simpson para estimar el superávit de los consumidores cuando se producen 24 000 unidades; esto es, cuando $q_0 = 24$.

q (1 000 unidades)	0	4	8	12	16	20	24
p (dólares por unidad)	49.12	42.90	31.32	19.83	13.87	10.58	7.25

---

14. (Superávit de los productores) Un economista que estudia la oferta de cierta mercancía ha reunido los datos en la siguiente tabla que indica el número de unidades de la mercancía, q (en miles), que serán ofertadas al mercado por los productores a un precio de p dólares por unidad. Use esta información junto con la regla de los trapecios para estimar el superávit de los productores, cuando se ofertan 7 000 unidades ($q_0 = 7$).

q (1 000 unidades)	0	1	2	3	4	5	6	7
p (dólares por unidad)	1.21	3.19	3.97	5.31	6.72	8.16	9.54	11.03

---

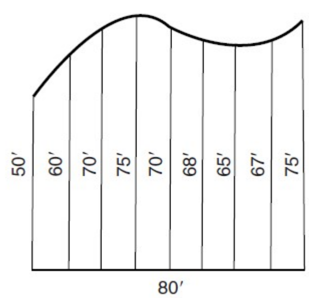
15. Un sociólogo que estudia la distribución del ingreso en una sociedad industrial compila los datos que aparecen en la siguiente tabla; donde $L(x)$ denota la fracción de la riqueza total de la sociedad, recibida por $100x\,\%$ de los salarios más bajos de los empleados de esa sociedad. Use esta información junto con la regla de los trapecios para estimar el índice de Gini (GI) para dicha sociedad; es decir,

$$\mathrm{GI} = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx$$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
$L(x)$	0	0.0063	0.0631	0.1418	0.2305	0.3342	0.4713	0.6758	1

---

16. Una parcela tiene un frente de 80 pies de largo. En la figura se muestran los anchos a intervalos de 10 pies. Encuentre el área aproximada del terreno utilizando: *a*) La regla del trapecio *b*) La regla de Simpson.



Referencias

[1] J. C. Arya, R. W. Lardner, and V. H. Ibarra Mercado. *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* Pearson, quinta edición, 2009.

[2] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía.* Pearson, décimo tercera edición, 2015.

[3] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales.* McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.