INTEGRALES DOBLES

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca toda la temática del tercer corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. La mayoría de los ejercicios son tomados de los textos [1], [2] y [3]. Para ejercicios similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

`https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec`

1. Evalúe las integrales dobles dadas a continuación.

   a) $\int_0^1 \int_1^2 x^2 y \, dxdy$

   b) $\int_0^{\ln 2} \int_{-1}^0 2xe^y \, dxdy$

   c) $\int_2^3 \int_{-1}^1 (x+2y) \, dydx$

   d) $\int_{-2}^3 \int_0^2 (y^2 - 2xy) \, dydx$

   e) $\int_0^1 \int_0^3 (4xy + 12x^2y^3) \, dxdy$

   f) $\int_1^3 \int_0^1 \frac{2xy}{x^2+1} \, dxdy$

   g) $\int_0^1 \int_0^1 x^2 e^{xy} \, dydx$

   h) $\int_0^4 \int_{-1}^1 x^2 y \, dydx$

   i) $\int_0^1 \int_1^5 y\sqrt{1-y^2} \, dxdy$

   j) $\int_2^3 \int_1^2 \frac{x+y}{xy} \, dydx$

   k) $\int_1^2 \int_2^3 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) \, dydx$

   l) $\int_0^1 \int_0^4 \sqrt{xy} \, dydx$

   m) $\int_0^1 \int_0^2 e^{-x-y} \, dydx$

   n) $\int_0^1 \int_0^2 x\sqrt{1-y} \, dxdy$

   ñ) $\int_0^2 \int_{-1}^1 \frac{6xy^2}{x^2+1} \, dydx$

   o) $\int_1^e \int_1^e \ln(xy) \, dydx$

   p) $\int_{-1}^1 \int_0^1 2xe^{x^2+y} \, dxdy$

   q) $\int_0^1 \int_1^2 \frac{x}{y^2} e^{x/y} \, dydx$

   r) $\int_1^5 \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{y+x^2}} \, dxdy$

   s) $\int_1^e \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{xy} \, dydx$

---

2. En los siguientes problemas use desigualdades para describir R en términos de sus secciones transversales verticales y horizontales.

   a) R es la región limitada por $y = x^2$ y $y = 3x$.

   b) R es la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

   c) R es el rectángulo con vértices $(-1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$ y $(-1,2)$.

   d) R es el triángulo con vértices $(1,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

   e) R es la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.

   f) R es la región limitada por $y = e^x$, $y = 2$ y $x = 0$.

   g) R es la región limitada por $x = y^2$ y $x = y + 2$.

   h) R es la región limitada por $y = 4 - x^2$, $y = x - 2$, $x \geq 0$.

   i) R es la región limitada por $x = 6 - y$, $x = y^2$, $y \geq 0$.

   j) R es la región limitada por $x + y^2 = 9$ y $x + 3y = 9$.

   k) R es la región limitada por $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

l) R es la región limitada por $x = 1 + 3y$, $x = 1 - y$ y $y = 1$.

m) R es la región limitada por $y = 1 - \sqrt{x}$, $y = 1 + \sqrt{x}$ y $x = 4$.

n) R es la región limitada por $y = \frac{1}{2}x$, $y = 6 - x$ y $y = 1$.

ñ) R es la región limitada por $2y - x = 4$ y $y^2 - x = 4$.

---

3. Evalúe la integral doble dada para la región R indicada.

a) $\iint_R 3xy^2 \, dA$, donde R es el rectángulo limitado por las rectas $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$ y $y = 0$.

b) $\iint_R \left(\sqrt{y} + x - 3xy^2\right) \, dxdy$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

c) $\iint\limits_R x^2 y e^{x-y} \, dxdy$, donde $R = [0, 3] \times [0, 2]$.

d) $\iint_R (x + 2y) \, dA$, donde R es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.

e) $\iint_R xe^y \, dA$, donde R es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

f) $\iint_R 48xy \, dA$, donde R es la región limitada por $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$.

g) $\iint_R 4xy^3 \, dA$, donde R es la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y $y = \frac{1}{2}x$.

h) $\iint_R (2y - x) \, dA$, donde R es la región limitada por $y = x^2$ y $y = 2x$.

i) $\iint_R 12x \, dA$, donde R es la región limitada por $y = x^2$ y $y = 6 - x$.

j) $\iint_R (2x + 1) \, dA$, donde R es el triángulo con vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

k) $\iint_R 2x \, dA$, donde R es la región limitada por $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$ y $x = 2$.

l) $\iint_R 3xy^2 \, dA$, donde R es la región limitada por $y = -x$, $y = x^2$, $x \geq 0$ y $x = 1$.

m) $\iint_R (2x + y) \, dA$, donde R es la región limitada por $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$ y $y = 0$.

n) $\iint_R \dfrac{1}{y^2 + 1} \, dA$, donde R es el triángulo limitado por las rectas $y = \dfrac{1}{2}x$, $y = -x$ y $y = 2$.

ñ) $\iint_R e^{y^3} \, dA$, donde R es la región limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ y $x = 0$.

o) $\iint_R 12x^2 e^{y^2} \, dA$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por $y = x^3$ y $y = x$.

p) $\iint_R y \, dA$, donde R es la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.

q) $\iint\limits_R e^{\frac{x}{y}} \, dA$, donde R es la región acotada por las rectas $y = 2x$, $y = -x$ y $y = 4$.

r) $\displaystyle\iint_R xy\, dA$, donde R es la región acotada por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y $x + y = 2$.

s) $\displaystyle\iint_R \sqrt{1+x+y}\, dA$, donde R es la región acotada por las rectas $y = x+1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

t) $\displaystyle\iint_R \sqrt{y+x^2}\, dA$, donde R es la región acotada por $y = 4x - x^2$ y $y = 0$.

u) $\displaystyle\iint_R (x+y+1)^3\, dA$, donde R es la región acotada por $x = 1+3y$, $x = 1-y$ y $y = 1$.

v) $\displaystyle\iint_R x(y-1)^2\, dA$, donde R es la región acotada por $y = 1-\sqrt{x}$, $y = 1+\sqrt{x}$ y $x = 4$.

w) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x+y}\, dA$, donde R es la región acotada por $y = \frac{1}{2}x$, $y = 6-x$ y $y = 1$.

---

4. En los siguientes problemas, dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dydx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x,y)\, dydx$

c) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^{x-1} f(x,y)\, dydx$

d) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{3-x} f(x,y)\, dydx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} f(x,y)\, dydx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\, dxdy$

g) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\, dydx$

h) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\, dxdy$

i) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dxdy$

j) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dydx$

k) $\displaystyle\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dxdy$

l) $\displaystyle\int_0^4 \int_{x/4}^{\sqrt{x}/2} f(x,y)\, dydx$

m) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^3}^{4x} f(x,y)\, dydx$

n) $\displaystyle\int_0^4 \int_{y^2/4}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\, dxdy$

ñ) $\displaystyle\int_1^{e^2} \int_{\ln x}^2 f(x,y)\, dydx$

o) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \int_{e^x}^3 f(x,y)\, dydx$

p) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2+1}^2 f(x,y)\, dydx$

q) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\, dxdy$

---

5. Emplee una integral doble para determinar el área de la región R descrita a continuación.

a) R es el triángulo con vértices $(-4,0)$, $(2,0)$ y $(2,6)$.

b) R es el triángulo con vértices $(0,-1)$, $(-2,1)$ y $(2,1)$.

c) R es el triángulo con vértices $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

d) R es la región limitada por $y = \dfrac{1}{2}x^2$ y $y = 2x$.

e) R es la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

f) R es la región limitada por $y = x^2$, $x = 2$ y $y = 1$.

g) R es la región limitada por $y = 4x - x^2$ y $y = 0$.

h) R es la región limitada por $y = 2 - x^2$ y $y = x$.

i) R es la región limitada por $y = x^2 - 4x + 3$ y el eje x.

j) R es la región limitada por $y = x^2 + 6x + 5$ y el eje x.

k) R es la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.

l) R es la región limitada por $y = x$, $y = \ln x$, $y = 0$ y $y = 1$.

m) R es la región del primer cuadrante limitada por $y = 4 - x^2$, $y = 3x$ y $y = 0$.

n) R es la región limitada por $y = 6x - x^2$ y $y = x$.

ñ) R es la región limitada por $y = 4x - x^2$ y $y = 0$.

o) R es la región limitada por $x = 0$, $y = 1 - \dfrac{x}{2}$ y $y = \dfrac{x}{2}$.

---

6. En los siguientes problemas, encuentre el volumen del sólido bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región R dada.

a) $f(x, y) = 6 - 2x - 2y$;
$R : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$

b) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$;
$R : -1 \leq x \leq 1,\ -2 \leq y \leq 2$

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$;
$R : 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3$

d) $f(x, y) = e^{x+y}$;
$R : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \ln 2$

e) $f(x, y) = xe^{-y}$;
$R : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$

f) $f(x, y) = (1 - x)(4 - y)$;
$R : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4$

g) $f(x, y) = 2x + y$; R está limitada por $y = x$, $y = 2 - x$ y $y = 0$

h) $f(x, y) = 1 - x - y$; R está limitada por $x + y = 1$, $x = 0$ y $y = 0$

i) $f(x, y) = 4xy$; R está limitada por $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = 0$ para $0 \leq x \leq 1$

j) $f(x, y) = e^{y^2}$; R está limitada por $x = 2y$, $x = 0$ y $y = 1$

k) $f(x, y) = x + 1$; R está limitada por $y = 8 - x^2$ y $y = x^2$

l) $f(x, y) = 4xe^y$; R está limitada por $y = 2x$, $y = 2$ y $x = 0$

---

7. Determine el volumen del sólido acotado arriba por el cilindro $z = x^2$ y abajo por la región encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$ en el plano xy.

---

8. Al calcular por doble integración el volumen V limitado por encima por la superficie $z = f(x, y)$ y por la parte inferior por una cierta región R del plano xy, se ha llegado a la siguiente suma de integrales reiteradas:
$$V = \int_1^2 \left[\int_x^{x^3} f(x, y)dy \right] dx + \int_2^8 \left[\int_x^8 f(x, y)dy \right] dx.$$
Dibuje la región R y exprese el volumen V mediante una integral reiterada en la que el orden de integración esté invertido.

---

9. Encuentre el valor promedio de la función $f(x,y)$ sobre la región R dada.

   a) $f(x,y) = xy(x-2y)$;
      $R: -2 \leq x \leq 3,\ -1 \leq y \leq 2$
   b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$;
      $R: 1 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq 3$
   c) $f(x,y) = xye^{x^2 y}$;
      $R: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$
   d) $f(x,y) = \dfrac{\ln x}{xy}$;
      $R: 1 \leq x \leq 2,\ 2 \leq y \leq 3$
   e) $f(x,y) = 6xy$; R es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(3,1)$
   f) $f(x,y) = e^{x^2}$; R es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$
   g) $f(x,y) = x$; R es la región limitada por $y = 4 - x^2$ y $y = 0$
   h) $f(x,y) = e^x y^{-1/2}$; R es la región limitada por $x = \sqrt{y}$, $y = 0$ y $x = 1$

---

10. En los siguientes problemas, evalúe la integral doble sobre la región R indicada. Escoja cuidadosamente el orden de integración.

    a) $\displaystyle\iint_R \frac{\ln(xy)}{y}\, dA$; $R: 1 \leq x \leq 3,\ 2 \leq y \leq 5$
    b) $\displaystyle\iint_R ye^{xy}\, dA$; $R: -1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2$
    c) $\displaystyle\iint_R x^3 e^{x^2 y}\, dA$; $R: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$
    d) $\displaystyle\iint_R e^{x^3}\, dA$; $R: \sqrt{y} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$
    e) $\displaystyle\iint_R \frac{2y + 3xy^2}{1+x^2}\, dA$; $R: 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1$
    f) $\displaystyle\iint_R \frac{2x+2y}{1+4y+y^2}\, dA$; $R: 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1$

---

11. Evalúe la integral iterada. (Nótese que es necesario cambiar el orden de integración).

    a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\, dxdy$
    b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dydx$
    c) $\displaystyle\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\, dydx$
    d) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\, dydx$
    e) $\displaystyle\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dydx$
    f) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 \frac{4x}{1+y^2}\, dydx$
    g) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1-x^2}\, dxdy$
    h) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 4ye^{x^2}\, dxdy$
    i) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{3x+y^2}\, dydx$

---

12. Encuentre el valor de a de manera que la siguiente igualdad sea cierta.

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2+1}^{4-a} dydx = \frac{4}{3}.$$

---

13. En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con las entradas x y y por la expresión $Q(x,y) = 2x^3 + 3x^2 y + y^3$. Si $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 7$, ¿cuál es el promedio de producción de la fábrica?

---

14. Si una industria invierte x miles de horas-trabajador, $10 \leq x \leq 20$, y \$$y$ millones, $1 \leq y \leq 2$, en la producción de N miles de unidades de un cierto artículo, entonces N está dada por

$$N(x, y) = x^{0,75}y^{0,25}.$$

¿Cuál es el número medio de unidades producidas para los rangos indicados de x e y?

---

15. En cierta fábrica, la producción la proporciona la función de producción de Cobb–Douglas

$$Q(k, l) = 50k^{3/5}l^{2/5},$$

donde k es la inversión de capital en unidades de \$1 000 y l es el tamaño de la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Suponga que la inversión mensual de capital varía entre \$10 000 y \$20 000, mientras que la fuerza laboral mensual varía entre 2 800 y 3 200 horas-trabajador. Encuentre la producción promedio mensual para la fábrica.

---

16. Un vendedor de bicicletas ha encontrado que si las bicicletas de 10 velocidades se venden en x dólares cada una, y el precio de la gasolina es y centavos por galón, entonces se venderán aproximadamente

$$Q(x, y) = 200 - 24\sqrt{x} + 4(0{,}1y + 5)^{3/2}$$

bicicletas por mes. Si el precio de las bicicletas varía entre \$287 y \$312 durante un mes típico, y el precio de la gasolina varía entre \$1,70 y \$1,82, ¿aproximadamente cuántas bicicletas se venderán cada mes?

---

17. Un fabricante estima que cuando se venden x unidades de cierta mercancía en el país, y y unidades en mercados extranjeros, la utilidad está dada por

$$P(x, y) = (x - 30)(70 + 5x - 4y) + (y - 40)(80 - 6x + 7y)$$

cientos de dólares. Si las ventas nacionales varían entre 100 y 125 unidades y las ventas en el extranjero entre 70 y 89 unidades, ¿cuál es la utilidad mensual promedio?

---

18. Una comunidad está trazada como un rectángulo cuadriculado respecto a dos calles principales que se cruzan en el centro de la ciudad. Cada punto de la comunidad tiene coordenadas (x, y) en esta cuadrícula, para $-10 \leq x \leq 10$, $-8 \leq y \leq 8$ con x y y medidas en millas. Suponga que el valor del terreno situado en el punto (x, y) es V mil dólares, donde

$$V(x, y) = (250 + 17x)e^{-0{,}01x - 0{,}05y}.$$

Estime el valor de la manzana de terrenos que ocupa la región rectangular $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$.

Referencias

[1] T. Apostol. *Calculus, Volume 2*. Wiley, 1969.

[2] R. A. Barnett, M. R. Ziegler, and K. E. Byleen. *Calculus for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences*. Pearson Education, Inc., thirteenth edition, 2015.

[3] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales*. McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.