

INTEGRAL IMPROPIA

Este taller tiene el propósito de ofrecer al estudiante un buen material de estudio que abarca parte de la temática del segundo corte de la asignatura, ver Parcelación y Programación Semanal del curso. La mayoría de los ejercicios son tomados de los textos [1] y [2]. Para ejercicios similares a los que aquí están planteados puede revisar los parciales aplicados en semestres anteriores, ver página web de la materia:

<https://www.uninorte.edu.co/web/departamento-de-matematicas-y-estadistica/calculo-3-anec>

1. Determine las siguientes integrales impropias, en caso de que existan.

a) $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$	g) $\int_0^{\infty} (5 + e^{-x}) dx$	m) $\int_{-\infty}^{\infty} (5 - 3x) dx$	r) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$
b) $\int_3^{\infty} \frac{1}{2x-1} dx$	h) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	n) $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$	s) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$
c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x-1)^2} dx$	i) $\int_4^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+9)^3}} dx$	$\tilde{n}) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{1-x^2} dx$	t) $\int_1^{\infty} x^{-3/2} dx$
d) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$	j) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{(x+1)^2} dx$	o) $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{(x^3+2)^2} dx$	u) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$
e) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} dx$	k) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$	p) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	v) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$
f) $\int_{37}^{\infty} e^{-x} dx$	l) $\int_{-\infty}^{\infty} 2x e^{-x^2} dx$	q) $\int_0^{\infty} 2x e^{-3x} dx$	w) $\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

2. La función de densidad para la vida x , en horas, de un componente electrónico en un medidor de radiación está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & \text{para } x \geq 800, \\ 0 & \text{para } x < 800. \end{cases}$$

- a) Si k satisface la condición de que $\int_{800}^{\infty} f(x) dx = 1$, encuentre k .
- b) La probabilidad de que el componente dure por lo menos 1200 horas está dada por $\int_{1200}^{\infty} f(x) dx$. Evalúe esta integral.

3. Para un negocio, el valor presente de todas las utilidades futuras a un interés anual r compuesto continuamente está dado por

$$\int_0^{\infty} p(t) e^{-rt} dt,$$

donde $p(t)$ es la utilidad anual en el tiempo t . Con $p(t) = 500\,000$ y $r = 0,02$, evalúe esta integral.

4. Un donador desea otorgar una beca a un colegio local con un regalo que proporcione un flujo continuo de ingresos a razón de $25\,000 + 1\,200t$ dólares por año a perpetuidad. Suponiendo que la tasa prevaleciente de interés anual permanezca fija a 5 % capitalizada continuamente, ¿qué cantidad se requiere para financiar la donación?
-
5. Una inversión generará \$2 400 al año a perpetuidad. Si el dinero se genera continuamente en el año y si la tasa prevaleciente de interés anual permanece fija a 4 % capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente de la inversión?
-
6. Se estima que dentro de t años, un complejo de apartamentos estará generando utilidad para su propietario a razón de $f(t) = 10\,000 + 500t$ dólares por año. Si la utilidad se genera a perpetuidad y la tasa prevaleciente de interés anual permanece fija a 5 % capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente del complejo de apartamentos?
-
7. La administración de una cadena nacional de restaurantes de comida rápida está vendiendo una franquicia permanente en Seattle, Washington. La experiencia en lugares semejantes sugiere que dentro de t años, la franquicia estará generando utilidades a razón de $f(t) = 12\,000 + 900t$ dólares por año. Si la tasa prevaleciente de interés permanece fija a 5 % capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente de la franquicia?
-
8. Un rico patrocinador de un pequeño colegio privado desea donar una cátedra de matemáticas con un regalo de G mil dólares. Suponga que el matemático que ocupa la cátedra va a recibir \$70 000 por año en salarios y prestaciones. Si el dinero cuesta 8 % por año capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor mínimo posible de G ?
-
9. El costo capitalizado de una propiedad es la suma del costo original de la propiedad y el valor presente de mantener la propiedad. Suponga que una compañía está considerando la compra de dos máquinas diferentes. La máquina 1 cuesta \$10 000 y dentro de t años su mantenimiento costará $M_1(t) = 1\,000(1 + 0,06t)$ dólares. La máquina 2 cuesta sólo \$8 000, pero el costo de su mantenimiento en el momento t es $M_2(t) = 1\,100$ dólares. Si el costo del dinero es 9 % por año capitalizado continuamente, ¿cuál es el costo capitalizado de cada máquina? ¿Cuál máquina debe comprar la compañía?

Referencias

- [1] E. F. Haeussler, R. S. Paul, and R. J. Wood. *Matemáticas para administración y economía*. Pearson, décimo tercera edición, 2015.
- [2] L. Hoffmann, G. Bradley, and K. H. Rosen. *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales*. McGraw-Hill Interamericana, octava edición, 2006.