UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 202210
Fila A
Marzo 5 de 2022

Nombre completo:________________ Código:________________

1. **[7 pts]** Una empresa produce x e y unidades de dos tipos de productos A y B, respectivamente. El costo por producir una unidad de A es 2 dólares y de B es 5 dólares. La empresa tiene costos fijos de 1 500 dólares semanalmente. La empresa vende el producto A a 6 dólares y B a 9 dólares. ¿Cuál es la utilidad de la empresa en términos de x e y?

---

2. **[10 pts]** Una empresa fabrica dos tipos de silla: ergonómica y normal. La función de costo para producir x sillas ergonómicas y y sillas normales está dada por

$$C(x, y) = 28\sqrt{xy} + 245x + 185y + 3\,020.$$

   (a) Calcule los costos marginales cuando $x = 8$ y $y = 20$.

   (b) Cuando se requiera producción adicional, ¿qué tipo de silla generará un costo con una tasa más alta?

---

3. **[10 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = \frac{400\sqrt[4]{p_B^3}}{p_A^2} \qquad \text{y} \qquad q_B = \frac{600p_A^3}{\sqrt[3]{p_B}}.$$

Indique si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

---

4. **[15 pts]** Una compañía fabrica dos productos A y B. Suponga que la función de costos conjuntos de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$c + \sqrt{c} = 32 + q_A\sqrt{9 + q_B^2},$$

donde c denota el costo total (en dólares). Determine los costos marginales con respecto a q_A cuando $q_A = 8$, $q_B = 4$ y $c = 64$.

---

5. **[8 pts]** Verifique que la función $z = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}y^2$ satisface la ecuación dada a continuación.

$$-x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] + z = 0.$$

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución de la fila A

① Si C son los costos de la empresa, entonces

$$C = 2x+5y+1500.$$

la utilidad U está dada por

$$U = \underbrace{6x+9y}_{\text{ingresos}} - C$$

$$= 4x+4y-1500$$

②

$$C(x,y) = 28(xy)^{1/2}+245x+185y+3020$$

a) $$\frac{\partial C}{\partial x} = 14(xy)^{-1/2}\cdot y + 245$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 14(xy)^{-1/2}\cdot x + 185$$

Entonces

$$\frac{\partial C}{\partial x}(8,20) = 267{,}13$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}(8,20) = 193{,}85$$

b) Una producción adicional del tipo de silla ergonómica genera un costo más alto.

③

$$q_A = 400P_A^{-2}P_B^{3/4} \wedge q_B = 600P_A^{3}P_B^{-1/3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_A}{\partial P_B} = 300P_A^{-2}P_B^{-1/4} \wedge \frac{\partial q_B}{\partial P_A} = 1800P_A^{2}P_B^{-1/3}$$

Como $\frac{\partial q_A}{\partial P_B} > 0$ y $\frac{\partial q_B}{\partial P_A} > 0$, entonces

A y B son productos competitivos.

④

$$\underbrace{C + C^{1/2} - 32 - q_A(9+q_B^2)^{1/2}}_{F(C,q_A,q_B)} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = -\frac{F_{q_A}}{F_C}$$

$$= -\frac{-(9+q_B^2)^{1/2}}{1+\frac{1}{2}C^{-1/2}} = \frac{\sqrt{9+q_B^2}}{1+\frac{1}{2\sqrt{C}}}$$

Si $q_A=8$, $q_B=4$ y $C=64$, entonces

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = \frac{\sqrt{9+4^2}}{1+\frac{1}{2\sqrt{64}}} = \frac{80}{17} \approx 4{,}705$$

⑤

$$z = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}y^2$$

entonces,

$$z_x = -1 \wedge z_y = y$$

luego,

$$-x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] + z$$

$$= \cancel{x} - y^2 + \frac{1}{2}y^2 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{x} + \frac{1}{2}y^2$$

$$= 0.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 202210
Fila B
Marzo 5 de 2022

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[7 pts]** Una empresa produce x e y unidades de dos tipos de productos A y B, respectivamente. El costo por producir una unidad de A es 4 dólares y de B es 7 dólares. La empresa tiene costos fijos de 2 000 dólares semanalmente. La empresa vende el producto A a 7 dólares y B a 10 dólares. ¿Cuál es la utilidad de la empresa en términos de x e y?

---

2. **[10 pts]** Una empresa fabrica dos tipos de silla: ergonómica y normal. La función de costo para producir x sillas ergonómicas y y sillas normales está dada por

$$C(x,y) = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1\,050.$$

   (a) Calcule los costos marginales cuando $x = 8$ y $y = 20$.

   (b) Cuando se requiera producción adicional, ¿qué tipo de silla generará un costo con una tasa más baja?

---

3. **[10 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = \frac{150\sqrt[3]{p_B^2}}{p_A} \qquad \text{y} \qquad q_B = \frac{600}{p_B^2\sqrt[4]{p_A}}.$$

Indique si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

---

4. **[15 pts]** Una compañía fabrica dos productos A y B. Suponga que la función de costos conjuntos de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$c + \sqrt{c} = 26 + q_B\sqrt{9 + q_A^2},$$

donde c denota el costo total (en dólares). Determine los costos marginales con respecto a q_B cuando $q_A = 4$, $q_B = 6$ y $c = 49$.

---

5. **[8 pts]** Verifique que la función $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - y$ satisface la ecuación dada a continuación.

$$-x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] + z = 0.$$

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución de la fila B

① Si C es el costo de la empresa, entonces

$$C = 4x + 7y + 2000.$$

La utilidad U está dada por

$$U = 7x + 10y - C$$
$$= 3x + 3y - 2000$$

②

$$C(x,y) = 32(xy)^{1/2} + 175x + 205y + 1050$$

a) $$\frac{\partial C}{\partial x} = 16(xy)^{-1/2}\cdot y + 175$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 16(xy)^{-1/2}\cdot x + 205$$

Entonces,

$$\frac{\partial C}{\partial x}(8,20) = 200{,}29$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}(8,20) = 215{,}11$$

b) Una producción adicional del tipo de silla ergonómica genera un costo más bajo.

③

$$q_A = 150\,p_A^{-1}\,p_B^{2/3} \ \wedge\ q_B = 600\,p_A^{-1/4}\,p_B^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 100\,p_A^{-1}\,p_B^{-1/3} \ \wedge\ \frac{\partial q_B}{\partial p_A} = -150\,p_A^{-5/4}\,p_B^{-2}$$

Como $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} > 0 \wedge \frac{\partial q_B}{\partial p_A} < 0$, entonces

A y B no son competitivas y tampoco complementarios.

④

$$\underbrace{C + C^{1/2} - 26 - q_B\sqrt{9 + q_A^2} = 0}_{F(C,\,q_A,\,q_B)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial q_B} = -\frac{F_{q_B}}{F_C}$$

$$= -\frac{-\sqrt{9+q_A^2}}{1 + \frac{1}{2}C^{-1/2}} = \frac{\sqrt{9+q_A^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{C}}}$$

Si $q_A = 4$, $q_B = 6$ y $C = 49$, entonces

$$\frac{\partial C}{\partial q_B} = \frac{\sqrt{9+4^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{49}}} = \frac{14}{3} = 4{,}66$$

⑤

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - y$$

entonces

$$z_x = x \ \wedge\ z_y = -1$$

Luego,

$$-x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] + z$$

$$= -x^2 + \cancel{y} + \frac{1}{2}x^2 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - \cancel{y}$$

$$= 0.$$