Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 202230
Fila A
Agosto 27 de 2022

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[10 pts]** En cierta fábrica la producción diaria es $P(k,l) = 120k^{1/3}l^{1/2}$ unidades, donde k denota la inversión de capital medida en unidades de mil, y l es la fuerza laboral medida en hora-trabajador.
   (a) [6 pts] Halle las funciones de productividad marginal.
   (b) [4 pts] Si actualmente se invierten 900 000 pesos de capital y todos los días se emplea una fuerza laboral de 1 000 horas-trabajador, determine la variación en la producción cuando se adicionan 1 000 pesos de capital y se mantiene fija la fuerza laboral.

---

2. **[12 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = \frac{100}{p_A\sqrt{p_B}} \qquad \text{y} \qquad q_B = \frac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}.$$

   Indique si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

---

3. **[14 pts]** Evalúe la derivada parcial indicada para los valores dados de las variables.

$$3r^3s + t = 2r(st + r^2);\ \partial s/\partial t,\ r = 1,\ s = 1,\ t = 1.$$

---

4. **[14 pts]** Verifique que la función $z = x + \frac{1}{2}y^2$ satisface la ecuación

$$-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4y^2\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{4y^2-1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución del Parcial I - 202230

fila A

1) Producción

$$P(k,l) = 120\, k^{1/3} l^{1/2}$$

ⓐ Productividades marginales

$$\frac{\partial P}{\partial k} = 40 k^{-2/3} l^{1/2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = 60 k^{1/3} l^{-1/2}$$

ⓑ Para $k = 900 \wedge l = 1000$, tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial k}(900, 1000) = 40(900)^{-2/3}(1000)^{1/2}$$

$$\approx 13{,}56.$$

Si se aumenta en una unidad la inversión de capital, pasando de 900.000 a 901.000, y se deja fija la fuerza laboral en 1000 tendremos que la producción se incrementa aprox. en 13,56 unidades.

2) $q_A = 100\, P_A^{-1} P_B^{-1/2} \quad \wedge \quad q_B = 500\, P_A^{-1/3} P_B^{-1}$

Tenemos:

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = -50\, P_A^{-1} P_B^{-3/2} < 0$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = -\frac{500}{3} P_A^{-4/3} P_B^{-1} < 0$$

los productos A y B son complementarios.

3) $3r^3 s + t = 2r(st + r^2)$

$$= 2rst + 2r^3$$

$$\Rightarrow \underbrace{3r^3 s + t - 2rst - 2r^3}_{F(r,s,t)} = 0$$

Entonces,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{F_t}{F_s}$$

$$= -\frac{1 - 2rs}{3r^3 - 2rt}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial s}{\partial t}\right|_{\substack{r=1\\ s=1\\ t=1}} = -\frac{1-2}{3-2} = 1$$

//

4) $z = x + \frac{1}{2} y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1$$

Entonces,

$$-y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{4y^2 - 1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= -y^2 \cdot 0 + 1 - 4y^2 \cdot 1 + \frac{4y^2-1}{\cancel{y}} \cdot \cancel{y}$$

$$= 1 - 4y^2 + 4y^2 - 1 = 0$$

//

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 202230
Fila B
Agosto 27 de 2022

Nombre completo:________________________ Código:________________________

1. **[10 pts]** En cierta fábrica la producción diaria es $P(k,l) = 90k^{1/5}l^{1/3}$ unidades, donde k denota la inversión de capital medida en unidades de mil, y l es la fuerza laboral medida en hora-trabajador.

   (a) [6 pts] Halle las funciones de productividad marginal.

   (b) [4 pts] Si actualmente se invierten 600 000 pesos de capital y todos los días se emplea una fuerza laboral de 2 000 horas-trabajador, determine la variación en la producción cuando se adicionan 1 000 pesos de capital y se mantiene fija la fuerza laboral.

---

2. **[12 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = \frac{240}{p_A^2\sqrt{p_B^3}} \qquad \text{y} \qquad q_B = \frac{450}{p_B^3\sqrt{p_A^5}}.$$

   Indique si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

---

3. **[14 pts]** Evalúe la derivada parcial indicada para los valores dados de las variables.

$$3r^3t + 2s^2 = r^4t(4rs + t^2);\ \partial t/\partial r,\ r = 1,\ s = 1,\ t = 1.$$

---

4. **[14 pts]** Verifique que la función $z = \frac{1}{2}x^2 + y$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4x^2\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{4x^2 - 1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución del Parcial I - 202230

fila B

1) Producción

$$P(k,l) = 90\, k^{1/5} l^{1/3}$$

ⓐ Productividades marginales

$$\frac{\partial P}{\partial k} = 18 k^{-4/5} l^{1/3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = 30\, k^{1/5} l^{-2/3}$$

ⓑ Para $k = 600 \wedge l = 2000$, tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial k}(600, 2000) = 18(600)^{-4/5}(2000)^{1/3}$$

$$\approx 1{,}35.$$

Si se aumenta en una unidad la inversión de capital, pasando de 600.000 a 601.000, y se deja fija la fuerza laboral en 1000 tendremos que la producción se incrementa aprox. en 1,35 unidades.

2) $q_A = 240\, P_A^{-2} P_B^{-3/2} \wedge q_B = 450\, P_A^{-5/2} P_B^{-3}$

Tenemos:

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = -360\, P_A^{-2} P_B^{-5/2} < 0$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = -1125\, P_A^{-7/2} P_B^{-3} < 0$$

los productos A y B son complementarios

3) $3r^3 t + 2s^2 = r^4 t(4rs + t^2)$

$$= 4r^5 st + r^4 t^3$$

$$\Rightarrow \underbrace{3r^3 t + 2s^2 - 4r^5 st - r^4 t^3}_{F(r,s,t)} = 0$$

Entonces,

$$\frac{\partial t}{\partial r} = -\frac{F_r}{F_t}$$

$$= -\frac{9r^2 t - 20 r^4 st - 4r^3 t^3}{3r^3 - 4r^5 s - 3r^4 t^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{\substack{r=1\\ s=1\\ t=1}} = -\frac{9 - 20 - 4}{3 - 4 - 3} = -\frac{15}{4}$$

4) $z = \frac{1}{2}x^2 + y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Entonces,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{4x^2 - 1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= 1 - x^2 \cdot 0 - 4x^2 \cdot 1 + \frac{4x^2 - 1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}$$

$$= 1 - 4x^2 + 4x^2 - 1 = 0.$$