PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO 3 ANEC **DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

Nombre Completo: ______________________________ Fecha: ____/02/2023 Prof. **Jaider Blanco G**.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Nota:____

1. **[1 punto]** En cierta fábrica, la producción diaria es $Q(K,L) = 60K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, donde K denota la inversión de capital medido en unidades de \$1000 y L es la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Suponga que la actual inversión de capital es de \$900 000 y que todos los días se emplea una fuerza laboral es 1000 horas-trabajador. Utilicé el análisis marginal para estimar el efecto de una hora -trabajador adicional en la producción diaria, si la inversión de capital no cambia. Interpretar los resultados.

   Solucion:

2. **[1 punto]** Considera la siguiente función $z(x,y) = x^4y^5 - 4y^{10} + \frac{10x^6}{2} + 2023$.

   Calcular

   a. z_{xxy}

   b. z_{yyx}

3. **[2 punto]** Una función de costos conjunto está definida en forma implícita por la ecuación

$$c + 300\sqrt[3]{c} = q_B\sqrt{256 + q_A^2} + 2900$$

   donde c es el costo total (en dólares) de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B.

   a. Aplicando derivación implícita, determine los costos marginales respecto a q_A y q_B, cuando se tienen 12 unidades del producto A, 10 unidades del producto B y el costo conjunto total es de 1000 dólares.

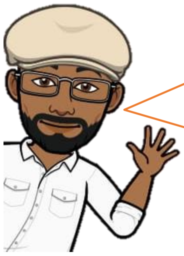
   b. Teniendo en cuenta los resultados del inciso anterior, ¿es más conveniente para la compañía producir una unidad adicional de A o de B? Justifique claramente su respuesta.

4. **[1 punto]** Las funciones de demanda para los productos A y B en función de los precios de A y B están dadas por

$$q_A = \frac{600\sqrt{p_B}}{\sqrt[3]{p_A^2}}$$

$$q_B = \frac{90\sqrt[3]{p_A}}{\sqrt[3]{p_B}}$$

   respectivamente. Determine si lo A y B son productos competitivos o productos complementarios o ni lo uno ni lo otro.



Observaciones.

1. La justificación detallada de sus afirmaciones hace parte de la evaluación
2. La duración del examen es de **90 minutos** y está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Esta prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos, **cualquier fraude o intento de fraude** será causal de **anulación** y apertura del correspondiente proceso disciplinario.
4. Durante la evaluación no hay ningún tipo de pregunta.

Solución.

1. Se tiene que la producción diaria es

$$Q(K,L) = 60K^{1/2}L^{1/3}$$

Calculando la productividad marginal respecto a las horas-trabajador obtenemos

$$Q_L(K,L) = 60\left(\frac{1}{3}\right)K^{1/2}L^{-2/3} = 20\frac{\sqrt{K}}{\sqrt[3]{L^2}}$$

Esto es,

$$Q_K(K,L) = 20\frac{\sqrt{K}}{\sqrt[3]{L^2}}$$

Ahora, evaluamos en $Q_L(K,L)$ los valores $K = 900$, $L = 1000$ obteniendo,

$$Q_L(900{,}100) = 20\frac{\sqrt{900}}{\sqrt[3]{1000^2}} = \frac{600}{100} = 6$$

Obteniendo el efecto de una hora-trabajador adicional de la producción diaria es de 6 unidades, si la inversión de capital no cambia.

2. Teniendo la función $z(x,y) = x^4y^5 - 4y^{10} + \frac{10x^6}{2} + 2023.$

   Calculamos $z_x = 4x^3y^5 + 30x^5$

   $z_{xx} = 12x^2y^5 + 150x^4$

   $z_{xxy} = 60x^2y^4$

   $z_y = 5x^4y^4 - 40y^9$

   $z_{yy} = 20x^4y^3 - 360y^3$

   $z_{yyx} = 80x^3y^3$

3. Aplicando derivación implícita obtenemos los costos marginales

   Primero encontremos c_{q_A} derivando de forma implícita la ecuación de costos conjunto con respecto a las unidades q_A,

$$(c + 300c^{1/3})_{q_A} = (q_B(256 + q_A^2)^{\frac{1}{2}} + 2900)_{q_A}$$

Obteniendo

$$c_{q_A} + 300\left(\frac{1}{3}\right)c^{-2/3}c_{q_A} = q_B\left(\frac{1}{2}\right)(256 + q_A^2)^{-\frac{1}{2}}(2q_A)$$

$$c_{q_A} + \frac{100c_{q_A}}{\sqrt[3]{c^2}} = \frac{q_A q_B}{\sqrt{256 + q_A^2}}$$

Factorizando

$$c_{q_A}\left(1 + \frac{100}{\sqrt[3]{c^2}}\right) = \frac{q_A q_B}{\sqrt{256 + q_A^2}}$$

Despejando c_{q_A}

$$c_{q_A} = \frac{\frac{q_A q_B}{\sqrt{256 + q_A^2}}}{1 + \frac{100}{\sqrt[3]{c^2}}}$$

Evaluando c_{q_A} en $q_A = 12, q_B = 10, c = 1000$

$$c_{q_A} = \frac{\frac{120}{20}}{1 + \frac{100}{100}} = \frac{6}{2} = 3$$

El costo de producir la unidad adicional de producto A es de 3 dólares.

Aplicando derivación implícita obtenemos los costos marginales

Segundo, encontremos c_{q_B} derivando de forma implícita la ecuación de costos conjunto con respecto a las unidades q_A,

$$(c + 300c^{1/3})_{q_B} = (q_B(256 + q_A^2)^{\frac{1}{2}} + 2900)_{q_B}$$

Obteniendo

$$c_{q_B} + 300\left(\frac{1}{3}\right)c^{-2/3}c_{q_B} = \sqrt{256 + q_A^2}$$

$$c_{q_B} + \frac{100c_{q_B}}{\sqrt[3]{c^2}} = \sqrt{256 + q_A^2}$$

Factorizando

$$c_{q_B}\left(1 + \frac{100}{\sqrt[3]{c^2}}\right) = \sqrt{256 + q_A^2}$$

Despejando c_{q_A}

$$c_{q_B} = \frac{\sqrt{256 + q_A^2}}{1 + \frac{100}{\sqrt[3]{c^2}}}$$

Evaluando c_{q_A} en $q_A = 12, q_B = 10, c = 1000$

$$c_{q_B} = \frac{20}{1 + \frac{100}{100}} = \frac{20}{2} = 10$$

$$c_{q_B} = 10$$

El costo de producir la unidad adicional de producto B es de 10 dólares.

4. Primero reescribimos las funciones demandas

$$q_A = 600 p_A^{-2/3} p_B^{1/2}$$
$$q_B = 90 p_A^{1/3} p_B^{-1/3}$$

Ahora calculamos las derivadas parciales $q_{A_{|p_B}}$ y $q_{B_{|p_A}}$

$$q_{A_{|p_B}} = 600\left(\frac{1}{2}\right) p_A^{-2/3} p_B^{-1/2} = \frac{300}{\sqrt[3]{p_A^2}\sqrt{p_B}} > 0$$
$$q_{B_{|p_A}} = 90\left(\frac{1}{3}\right) p_A^{-2/3} p_B^{-1/3} = \frac{30}{\sqrt[3]{p_A^2 p_B}} > 0$$

Puesto que las demandas marginales anteriores son positivas, podemos afirmar que los productos A y B son Competitivos o sustitutos.

PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO 3 ANEC **DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Nombre Completo: ______________________________ Fecha: ____/02/2023 Prof. **Jaider Blanco G**.

Nota: ____

1. **[1 punto]** En cierta fabrica, la producción diaria es $Q(K, L) = 60K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, donde K denota la inversión de capital medido en unidades de \$1000 y L es la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Suponga que la actual inversión de capital es de \$900 000 y que todos los días se emplea una fuerza laboral es 100 horas-trabajador. Utilicé el análisis marginal para estimar el efecto de una inversión adicional de \$1000 en la producción diaria, si la fuerza laboral no cambia. Interpretar los resultados.

2. **[1 punto]** Considera la siguiente función $z(x, y) = x^5y^4 + 10x^4 - \frac{10y^6}{3} + 2023$.

   Calcular

   a. z_{xxy}

   b. z_{yyx}

3. **[2 punto]** Una función de costos conjunto está definida en forma implícita por la ecuación

$$c + 20\sqrt{c} = q_B\sqrt{256 + q_A^2} + 100$$

   donde c es el costo total (en dólares) de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B.

   a. Aplicando derivación implícita, determine los costos marginales respecto a q_A y q_B, cuando se tienen 12 unidades del producto A, 10 unidades del producto B y el costo conjunto total es de 100 dólares.

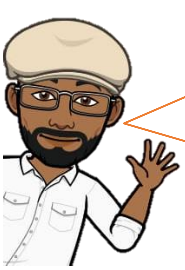
   b. Teniendo en cuenta los resultados del inciso anterior, ¿es más conveniente para la compañía producir una unidad adicional de A o de B? Justifique claramente su respuesta.

4. **[1 punto]** Las funciones de demanda para los productos A y B en función de los precios de A y B están dadas por

$$q_A = \frac{600\sqrt{p_A}}{\sqrt[3]{p_B^2}}$$

$$q_B = \frac{90\sqrt[3]{p_B}}{\sqrt[3]{p_A}}$$

   respectivamente. Determine si lo A y B son productos competitivos o productos complementarios o ni lo uno ni lo otro.



Observaciones.

1. La justificación detallada de sus afirmaciones hace parte de la evaluación
2. La duración del examen es de **90 minutos** y está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Esta prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos, **cualquier fraude o intento de fraude** será causal de **anulación** y apertura del correspondiente proceso disciplinario.
4. Durante la evaluación no hay ningún tipo de pregunta.

Solución.

1. Se tiene que la producción diaria es

$$Q(K,L) = 60K^{1/2}L^{1/3}$$

Calculando la productividad marginal respecto al capital obtenemos

$$Q_K(K,L) = 60\left(\frac{1}{2}\right)K^{-1/2}L^{1/3} = 30\frac{\sqrt[3]{L}}{\sqrt{K}}$$

Esto es,

$$Q_K(K,L) = 30\frac{\sqrt[3]{L}}{\sqrt{K}}$$

Ahora, evaluamos en $Q_K(K,L)$ los valores $K = 900$, $L = 100$ obteniendo,

$$Q_K(900,100) = 30\frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt{900}} = 4.64$$

Obteniendo el efecto de una inversión adicional de $1000 de la producción diaria es de 4,64 $\approx$ 5 unidades si la fuerza laboral no cambia.

2. Teniendo la función $z(x,y) = x^5y^4 + 10x^4 - \frac{10y^6}{3} + 2023$.

   Calculamos $z_x = 5x^4y^4 + 40x^3$

   $z_{xx} = 20x^3y^4 + 120x^2$

   $z_{xxy} = 80x^3y^3$

   $z_y = 4x^5y^3 - 20y^5$

   $z_{yy} = 12x^5y^2 - 100y^4$

   $z_{yyx} = 60x^4y^2$

3. Aplicando derivación implícita obtenemos los costos marginales

   Primero encontremos c_{q_A} derivando de forma implícita la ecuación de costos conjunto con respecto a las unidades q_A,

$$(c + 20c^{1/2})_{q_A} = (q_B(256 + q_A^2)^{\frac{1}{2}} + 10)_{q_A}$$

Obteniendo

$$c_{q_A} + 20\left(\frac{1}{2}\right)c^{-1/2}c_{q_A} = q_B\left(\frac{1}{2}\right)(256 + q_A^2)^{-\frac{1}{2}}(2q_A)$$

$$c_{q_A} + \frac{10c_{q_A}}{\sqrt{c}} = \frac{q_Aq_B}{\sqrt{256 + q_A^2}}$$

Factorizando

$$c_{q_A}\left(1+\frac{10}{\sqrt{c}}\right)=\frac{q_Aq_B}{\sqrt{256+q_A^2}}$$

Despejando c_{q_A}

$$c_{q_A}=\frac{\frac{q_Aq_B}{\sqrt{256+q_A^2}}}{1+\frac{10}{\sqrt{c}}}$$

Evaluando c_{q_A} en $q_A=12, q_B=10, c=100$

$$c_{q_A}=\frac{\frac{120}{20}}{1+\frac{10}{10}}=\frac{6}{2}=3$$

$$c_{q_A}=3$$

El costo de producir la unidad adicional de producto A es de 3 dólares.

Aplicando derivación implícita obtenemos los costos marginales

Primero encontremos c_{q_B} derivando de forma implícita la ecuación de costos conjunto con respecto a las unidades q_A,

$$(c+20c^{1/2})_{q_B}=(q_B(256+q_A^2)^{\frac{1}{2}}+10)_{q_B}$$

Obteniendo

$$c_{q_B}+20\left(\frac{1}{2}\right)c^{-1/2}c_{q_B}=\sqrt{256+q_A^2}$$

$$c_{q_B}+\frac{10c_{q_B}}{\sqrt{c}}=\sqrt{256+q_A^2}$$

Factorizando

$$c_{q_B}\left(1+\frac{10}{\sqrt{c}}\right)=\sqrt{256+q_A^2}$$

Despejando c_{q_A}

$$c_{q_B}=\frac{\sqrt{256+q_A^2}}{1+\frac{10}{\sqrt{c}}}$$

Evaluando c_{q_A} en $q_A = 12, q_B = 10, c = 100$

$$c_{q_B} = \frac{20}{1 + \frac{10}{10}} = \frac{20}{2} = 10$$

$$c_{q_B} = 10$$

El costo de producir la unidad adicional de producto B es de 10 dólares.

b) Es más conveniente para la compañía producir una unidad adicional del producto A debido a que el costo de producción es menor.

4. Primero reescribimos las funciones demandas

$$q_A = 600 p_A^{-2/3} p_B^{1/2}$$
$$q_B = 90 p_A^{1/3} p_B^{-1/3}$$

Ahora calculamos las derivadas parciales $q_{A|p_B}$ y $q_{B|p_A}$

$$q_{A|p_B} = 600\left(\frac{1}{2}\right) p_A^{-2/3} p_B^{-1/2} = \frac{300}{\sqrt[3]{p_A^2}\sqrt{p_B}} > 0$$
$$q_{B|p_A} = 90\left(\frac{1}{3}\right) p_A^{-2/3} p_B^{-1/3} = \frac{30}{\sqrt[3]{p_A^2 p_B}} > 0$$

Puesto que las demandas marginales anteriores son positivas, podemos afirmar que los productos A y B son Competitivos o sustitutos.