

Nombre completo: _____ Código: _____

1. [10 pts] Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.
- (a) [5 pts] La función $f(x, y) = \frac{\ln y}{\sqrt{x}}$ tiene dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$ ()
- (b) [5 pts] Dos productos relacionados A y B , con funciones de demandas $q_A = \frac{20p_A}{p_B^2}$ y $q_B = 30\sqrt{p_A^3 p_B}$, respectivamente, son complementarios ()
-

2. [8 pts] Un supermercado vende dos marcas de café: la marca A a $\$p_A$ por libra y la marca B a $\$p_B$ por libra. Las ecuaciones de demanda diaria para las marcas A y B son, respectivamente,
- $$q_A = 200 - 5p_A + 4p_B \quad \text{y} \quad q_B = 300 + 2p_A - 4p_B$$
- (ambas en libras). Encuentre la función de ingresos diarios $I(p_A, p_B)$ y calcule $I(3, 2)$.
-

3. [12 pts] Se estima que la producción semanal de cierta planta está dada por
- $$Q(x, y) = 1175x + 483y + 3.1x^2y - 1.2x^3 - 2.7y^2$$
- unidades, donde x es el número de trabajadores calificados y y el de no calificados, empleados en la planta. Actualmente la fuerza laboral se conforma de 37 trabajadores calificados y 71 no calificados. ¿Debe el gerente de la planta emplear un trabajador calificado o uno no calificado para aumentar más rápidamente la producción?
-

4. [12 pts] Una empresa produce dos artículos A y B . La función de costos conjuntos de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por
- $$c + \sqrt{c} = 30 + q_B \sqrt{11 + q_A^2},$$
- donde c denota el costo total (en dólares). Determine los costos marginales con respecto a q_B cuando $q_A = 5$, $q_B = 2$ y $c = 36$.
-

5. [8 pts] Verifique que la función $z(x, y) = xy^2 + \frac{1}{2}$ satisface la ecuación
- $$\ln(x^2 + e^y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{2y} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + x \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2xy} \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 1.$$
-

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

① a) $f(x,y) = \frac{\ln y}{\sqrt{x}}$
 Sol $y > 0 \wedge x > 0$ V

$\rightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$

b) $q_A = 20 P_A P_B^{-2} \wedge q_B = 30 P_A^{3/2} P_B^{1/2}$

$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = -40 P_A P_B^{-3} < 0$

$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = 45 P_A^{1/2} P_B^{1/2} > 0$ F

A y B no son complementarios

② la función de ingresos diarios está dada por

$I(P_A, P_B) = P_A q_A + P_B q_B$

$= -5P_A^2 - 4P_B^2 + 6P_A P_B + 200P_A + 300P_B$

Entonces,

$I(3,2) = 1175$

③ $Q(x,y) = 1175x + 483y + 3,1x^2y - 1,2x^3 - 2,7y^2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1175 + 6,2xy - 3,6x^2$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = 483 + 3,1x^2 - 5,4y$

Entonces

$\frac{\partial Q}{\partial x}(37,71) = 12534$

$\frac{\partial Q}{\partial y}(37,71) = 4343,5$

El gerente debe adicionar un trabajador calificado para aumentar más rápido la producción.

④ $c + \sqrt{c} = 30 + q_B \sqrt{11 + q_A^2}$
 $\Rightarrow \underbrace{c + \sqrt{c} - 30 - q_B \sqrt{11 + q_A^2}}_{F(q_A, q_B, c)} = 0$

$\frac{\partial c}{\partial q_B} = - \frac{F_{q_B}}{F_c}$
 $= - \frac{-\sqrt{11 + q_A^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{c}}} = \frac{\sqrt{11 + q_A^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{c}}}$

Luego,

$\frac{\partial c}{\partial q_B} \Big|_{\substack{q_A=5 \\ q_B=2 \\ c=36}} = \frac{\sqrt{11+5^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{36}}} = \frac{6}{1 + \frac{1}{12}} = \frac{72}{13}$

⑤ $z = xy^2 + \frac{1}{2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x$

Entonces,

$\ln(x^2 + e^y) z_{xx} + \frac{1}{2} y^2 z_{yy} + \frac{1}{2y} z_{xy} + x z_x + \frac{1}{2xy} z_y - 2z$

$= \ln(x^2 + e^y) \cdot 0 + \frac{1}{2} y^2 \cdot 2x + \frac{1}{2y} \cdot 2y + x \cdot y^2 + \frac{1}{2xy} \cdot 2xy - 2xy^2 - 1$

$= \cancel{xy^2} + 1 + \cancel{xy^2} + 1 - 2xy^2 - 1$

$= 1$

Nombre completo: _____ Código: _____

1. [10 pts] Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.

- (a) [5 pts] La función $f(x, y) = \frac{2^{\ln x}}{\sqrt{y-1}}$ tiene dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 1\}$ ()
- (b) [5 pts] Dos productos relacionados A y B , con funciones de demandas $q_A = 20\sqrt{p_A p_B^5}$ y $q_B = \frac{10p_B}{p_A^3}$, respectivamente, son competitivos ()
-

2. [8 pts] Un supermercado vende dos marcas de café: la marca A a $\$p_A$ por libra y la marca B a $\$p_B$ por libra. Las ecuaciones de demanda diaria para las marcas A y B son, respectivamente,

$$q_A = 300 - 4p_A + 2p_B \quad \text{y} \quad q_B = 200 + 4p_A - 5p_B$$

(ambas en libras). Encuentre la función de ingresos diarios $I(p_A, p_B)$ y calcule $I(3, 2)$.

3. [12 pts] Se estima que la producción semanal de cierta planta está dada por

$$Q(x, y) = 1285x + 468y + 2.9x^2y - 1.3x^3 - 2.5y^2$$

unidades, donde x es el número de trabajadores calificados y y el de no calificados, empleados en la planta. Actualmente la fuerza laboral se conforma de 38 trabajadores calificados y 70 no calificados. ¿Debe el gerente de la planta emplear un trabajador calificado o uno no calificado para aumentar más rápidamente la producción?

4. [12 pts] Una empresa produce dos artículos A y B . La función de costos conjuntos de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$c + \sqrt{c} = 51 + q_A \sqrt{13 + q_B^2},$$

donde c denota el costo total (en dólares). Determine los costos marginales con respecto a q_A cuando $q_A = 3$, $q_B = 6$ y $c = 64$.

5. [8 pts] Verifique que la función $z(x, y) = x^2y + \frac{1}{2}$ satisface la ecuación

$$\frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - e^{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{2x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2xy} \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z = 1.$$

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

1) a) $f(x,y) = \frac{2^{\ln x}}{\sqrt{y-1}}$

Sol $x > 0 \wedge y > 1$ [V]

$\Rightarrow D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 1\}$

b) $q_A = 20 P_A^{1/2} P_B^{5/2} \wedge q_B = 10 P_A^{-3} P_B$

$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = 50 P_A^{1/2} P_B^{3/2} > 0$

$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = -30 P_A^{-4} P_B < 0$ [F]

A y B no son competitivos

② La función de ingresos diarios está dada por

$I(P_A, P_B) = P_A q_A + P_B q_B$

$= -4 P_A^2 - 5 P_B^2 + 6 P_A P_B + 300 P_A + 200 P_B$

Entonces

$I(3,2) = 1280$

③ $Q(x,y) = 1205x + 468y + 2,9x^2y - 1,3x^3 - 2,5y^2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1205 + 5,8xy - 3,9x^2$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = 468 + 2,9x^2 - 5y$

Entonces,

$\frac{\partial Q}{\partial x}(38,70) = 11081,4$

$\frac{\partial Q}{\partial y}(38,70) = 4305,6$

El gerente debe adicionar un trabajador calificado para aumentar más rápido la producción.

④ $C + \sqrt{C} = 51 + 9_A \sqrt{13 + 9_B^2}$

$\Rightarrow C + \sqrt{C} - 51 - 9_A \sqrt{13 + 9_B^2} = 0$
 $F(9_A, 9_B, C)$

$\frac{\partial C}{\partial 9_A} = - \frac{F_{9_A}}{F_C}$

$= - \frac{-\sqrt{13 + 9_B^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{C}}} = \frac{\sqrt{13 + 9_B^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{C}}}$

Luego,

$\frac{\partial C}{\partial 9_A} \Big|_{\substack{9_A=3 \\ 9_B=6 \\ C=64}} = \frac{\sqrt{13 + 6^2}}{1 + \frac{1}{2\sqrt{64}}} = \frac{7}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{112}{17}$

⑤ $z = x^2y + \frac{1}{z}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x$

Entonces,

$\frac{1}{2}x^2 z_{xx} - e^{x^2} z_{yy} + \frac{1}{2x} z_{yx} + \frac{1}{2xy} z_x + y z_y - z z$

$= \frac{1}{2}x^2 \cdot 2y - e^{x^2} \cdot 0 + \frac{1}{2x} \cdot 2x + \frac{1}{2xy} \cdot 2xy + y \cdot x^2 - 2x^2y - 1$

$= x^2y + 1 + 1 + x^2y - 2x^2y - 1$

$= 1$