UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III (ANEC) 202330
Agosto 25 de 2023

Nombre completo:____________________________________Código:____________________________________

1. **[7 pts]** Determine y grafique, en el plano cartesiano, el dominio de la función dada a continuación.

$$f(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2) + \sqrt{y - 2}.$$

---

2. **[9 pts]** Una librería en línea está en competencia directa con *amazon.com*, *bn.com* y *borders.com*. El ingreso diario de la librería en dólares está dada por

$$I(x, y, z) = 10\ 000 - 0.01x - 0.02y - 0.01z + 0.00001yz,$$

donde x, y y z son los ingresos diarios en línea de *amazon.com*, *bn.com* y *borders.com*, respectivamente.

(a) [4 pts] Si, en cierto día, *amazon.com* obtiene ingresos de 12 000 dólares mientras que *bn.com* y *borders.com* tienen \$5 000 cada uno, ¿cuáles serán los ingresos de la librería en ese día?

(b) [5 pts] Si *amazon.com* y *bn.com* tienen \$5 000 de ingresos diarios cada uno, dé una función que indique el ingreso diario de la librería que dependa de los ingresos diarios de *borders.com*.

---

3. **[12 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = 3\sqrt[3]{\frac{p_A}{p_B}}$$

donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y de B, y p_A y p_B son los precios correspondientes (en dólares) por unidad.

(a) [5 pts] Encuentre las dos demandas marginales para el producto B cuando $p_A = 8$ y $p_B = 27$.

(b) [7 pts] Si p_B se reduce de 27 a 25, con p_A fijo en 8, use el inciso a) para estimar el cambio correspondiente en la demanda para el producto B.

---

4. **[10 pts]** Considere la ecuación $\dfrac{2r^3s^2}{rs^2 + rt^2} = 1$ y calcule $\dfrac{\partial r}{\partial t}$ cuando $r = 1$, $s = 1$ y $t = 1$.

---

5. **[12 pts]** Verifique que la función $z(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución

1) $f(x,y) = \ln(25-x^2-y^2) + \sqrt{y-2}$.

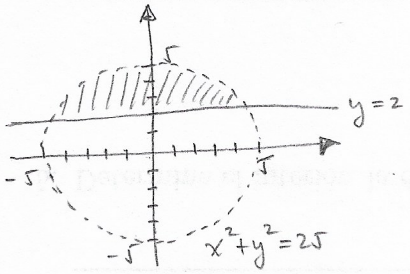
Debe darse que

$25-x^2-y^2>0$ y $y-2\geq 0$

esto es,

$x^2+y^2<25$ y $y\geq 2$

$\Rightarrow D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<25 \wedge y\geq 2\}$



2) $I(x,y,z) = 10.000 - 0{,}01x - 0{,}02y - 0{,}01z + 0{,}00001yz$

a) Para $x = 12.000$, $y = 5000$ y $z = 5000$, tenemos que los ingresos de la librería son

$I(12.000,\ 5.000,\ 5.000) = 9980$.

b) Cuando $x = 5.000$ e $y = 5.000$, tenemos que los ingresos de la librería en función de los ingresos diarios de Borders.com están dados por

$I(z) = 9850 + 0{,}04z$

3) La demanda de B está dada por

$$q_B = 3P_A^{1/3}P_B^{-1/3}$$

a) Demandas marginales para el producto B,

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = P_A^{-2/3}P_B^{-1/3} \quad \wedge \quad \frac{\partial q_B}{\partial P_B} = -P_A^{1/3}P_B^{-4/3}.$$

Cuando $P_A=8$ y $P_B=27$, tenemos

$$\left.\frac{\partial q_B}{\partial P_A}\right|_{\substack{P_A=8\\P_B=27}} = \frac{1}{12} \quad \wedge \quad \left.\frac{\partial q_B}{\partial P_B}\right|_{\substack{P_A=8\\P_B=27}} = -\frac{2}{81}$$

b) Dado que $\left.\frac{\partial q_B}{\partial P_B}\right|_{\substack{P_A=8\\P_B=27}} = -\frac{2}{81}$, entonces cuando se reduce P_B de 27 a 25 y P_A está fijo en 8, tenemos que la demanda del producto B aumenta aprox. en $2\cdot\frac{2}{81} = \frac{4}{81}$.

4) $\frac{2r^3s^2}{rs^2+rt^2} = 1$; $\frac{\partial r}{\partial t}$ cuando $r=1$, $s=1$ y $t=1$.

Tenemos,

$$\underbrace{2r^3s^2 - rs^2 - rt^2}_{F(r,s,t)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{F_t}{F_r}$$

$$= -\frac{-2rt}{6r^2s^2-s^2-t^2} = \frac{2rt}{6r^2s^2-s^2-t^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial r}{\partial t}\right|_{\substack{r=1\\s=1\\t=1}} = \frac{1}{2}$$

5) $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x^2-2xy+y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2x^3+6x^2y-6xy^2-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y^2-2xy+x^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2y^3+6xy^2-6x^2y-2x^3}{(x^2+y^2)^3}$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^3+6x^2y-6xy^2-2y^3}{(x^2+y^2)^3} + \frac{2y^3+6xy^2-6x^2y-2x^3}{(x^2+y^2)^3} = 0.$$