Ejercicio 1. (1.5 ptos):

Para cada una de las proposiciones siguientes, diga si la expresión es verdadera (V) o falsa (F). Justifique claramente su respuesta.

a) El punto $(2,3)$ está en el dominio de la función $f(x,y)=\sqrt{\frac{y}{x^2-y^2}}$. (F)
Porque $f(2,3)=\sqrt{\frac{3}{-5}}\notin\mathbb{R}$, por lo tanto $(2,3)\notin Dom(f)$.

b) Si $c(x,y)=7x+0,3y^2+2y+900$, entonces el costo marginal $\frac{\partial c}{\partial y}(20,30)=14$. (F)
Porque $\frac{\partial c}{\partial y}(x,y)=0,6y+2$, entonces $\frac{\partial c}{\partial y}(20,30)=0,6(30)+2=20\neq 14$.

c) Si $u=ye^{-2xy}$, entonces $yu_y-xu_x=u$. (V)
Porque $u_y=(1-2xy)e^{-2xy}$ y $u_x=-2y^2e^{-2xy}$, entonces

$$yu_y-xu_x=(y-2xy^2)e^{-2xy}+2xy^2e^{-2xy}=ye^{-2xy}=u.$$

Ejercicio 2.(1.0 ptos):

En economía, consideremos la siguiente función de producción Cobb-Douglas $P(l,k)=100l^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}}$. Para tal función, pruebe que

$$l\frac{\partial P}{\partial l}+k\frac{\partial P}{\partial k}=P.$$

Esto significa que al sumar los productos de la productividad marginal por cada factor y la cantidad de ese factor, se obtiene la producción total P.
Solución: Tenemos que $\frac{\partial P}{\partial l}=\frac{100}{3}l^{\frac{1}{3}-1}k^{\frac{2}{3}}$ y $\frac{\partial P}{\partial k}=\frac{200}{3}l^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}-1}$, por tanto

$$l\frac{\partial P}{\partial l}+k\frac{\partial P}{\partial k}=l\frac{100}{3}l^{\frac{1}{3}-1}k^{\frac{2}{3}}+k\frac{200}{3}l^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}-1}=\frac{100}{3}l^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}}+\frac{200}{3}l^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}}=(\frac{100}{3}+\frac{200}{3})l^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}}=100l^{\frac{1}{3}}k^{\frac{2}{3}}=P.$$

Ejercicio 3.(1.5 ptos):

Supongamos que $q_A=\frac{300}{\sqrt{p_Ap_B}}$ y $q_B=\frac{200}{\sqrt{p_A^3p_B}}$ son las funciones de demanda para dos productos A y B, respectivamente, y que p_A y p_B son sus respectivos precios. Encuentre $\frac{\partial q_A}{\partial p_A}$, $\frac{\partial q_A}{\partial p_B}$, $\frac{\partial q_B}{\partial p_A}$ y $\frac{\partial q_B}{\partial p_B}$ y determine si A y B son productos competitivos, complementarios o ni uno ni otro.
Solución: Las cuatros derivadas parciales son: $\frac{\partial q_A}{\partial p_A}=-\frac{150}{\sqrt{p_A^3p_B}}$, $\frac{\partial q_A}{\partial p_B}=-\frac{150}{\sqrt{p_Ap_B^3}}$, $\frac{\partial q_B}{\partial p_A}=-\frac{300}{\sqrt{p_A^5p_B}}$ y $\frac{\partial q_B}{\partial p_B}=-\frac{100}{\sqrt{p_A^3p_B^3}}$. En este caso, los productos A y B son productos complementarios.

Ejercicio 4.(1.0 pt0s):

Encuentre las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ por el método de derivación parcial implícita, donde

$$x^2-2y-z^2+x^2yz^2=20.$$

Solución: Derivando implicitamente con respecto a x, obtenemos $2x-2z\frac{\partial z}{\partial x}+2xyz^2+2x^2yz\frac{\partial z}{\partial x}=0$, luego $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x-xyz^2}{-z+x^2yz}$. Ahora, derivando implicitamente con respecto a y, tenemos $-2-2z\frac{\partial z}{\partial y}+x^2z^2+2x^2yz\frac{\partial z}{\partial x}=0$, luego $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2-x^2z^2}{-2z+2x^2yz}$.