

Departamento de Matemáticas y Estadística

Primer parcial de Cálculo 3 (Anec)

- 1) Encuentre la derivada parcial indicada por el método de diferenciación parcial implícita.

$$\sqrt{xz + y^2} - xy = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

- 2) Si $h(x, y) = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, encuentre $h_y(1, -2)$.

- 3) Las ecuaciones de demanda para los productos A y B están dadas por

$$q_A = \frac{100\sqrt{p_B}}{p_A^2} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{500\sqrt[3]{p_A}}{\sqrt{p_B^3}},$$

respectivamente, donde q_A y q_B son las cantidades demandadas de A y B, y p_A y p_B son los precios correspondientes por unidad. Determine si los productos son competitivos, complementarios o de ninguno de los dos tipos. Justifique su respuesta.

- 4) Suponga que una función de producción está dada por

$$p = \frac{kl}{2k+2l}.$$

- (a) Determine las funciones de productividad marginal.
(b) Demuestre que cuando $k = l$, la suma de las productividades marginales es $\frac{1}{4}$.

Cada numeral tiene la valoración de 1.25 puntos.

Tiempo máximo: 90 minutos.

Solución

$$1) \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2} (xz + y^2) \right)^{-1/2} \cdot \left(x \frac{\partial z}{\partial y} + 2y \right) \right] - x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{(xz + y^2)^{-1/2}} - 2y = \frac{2x\sqrt{xz + y^2} - 2y}{x}$$

$$2) \Rightarrow h_y(x, y) = \frac{(3x + 2y)(\sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{2y(x^2 + 3xy + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow h_y(1, -2) = \frac{-\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}}{5} = -\frac{7\sqrt{5}}{25} \approx -0,626$$

$$3) \Rightarrow \frac{\partial q_A}{\partial p_B} = \frac{50}{p_A^2 \sqrt{p_B}} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} = \frac{166,6}{\sqrt{p_A^2} \sqrt{p_B^3}} > 0$$

Son competitivos.

$$4) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial \kappa} = \frac{2l^2}{(2\kappa + 2l)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial l} = \frac{2\kappa^2}{(2\kappa + 2l)^2}$$

Si $\kappa = l = a$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{2a^2}{(2a+2a)^2} + \frac{2a^2}{(2a+2a)^2} &= \frac{2a^2}{(4a)^2} + \frac{2a^2}{(4a)^2} \\ &= \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$