Primer Parcial de Cálculo III

$Profesor : J Tilano$
UNIVERSIDAD DEL NORTE
Duración: 2 Horas

1) Hallar las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones de z.
a) $9 = x^2 + y^2 - z^2$.
b) $z^2 = e^{xyz}$.
c) $5 = x + y + z$.
d) $4xyz = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
2) Hallar el gradiente de las siguientes funciones en cada punto, aplicando derivación implícita.
a) $z^4 = 5x^2 + 9y^2$; en $P(-1, 1)$.
b) $z^2 = e^{2x^2 y}$; en $Q(3, 4)$.
c) $1 = 3x - 5y + 6z$; $R(-3, 5)$.
d) $9x = -8x^2 + 2y^2 - 3z^2$; $S(-1, 5)$.
3) Dada la función de producción de una compañía, según el modelo de Cobb-Douglas, con un 68% de fuerza laboral y un 32% de capital de insumo, teniendo en cuenta que el factor de productividad es 2.
(a) Defina la función $Q(t, c)$ de Cobb- Douglas.
(b) Determine en el punto $P(80, 156000)$, el vector gradiente de productividades marginales e interprete el resultado.

Solución Primer Parcial de Cálculo III

$Profesor: J Tilano$
UNIVERSIDAD DEL NORTE
Duración: 2 Horas

1) Hallar las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones de z.
a) $9 = x^2 + y^2 - z^2$.
Derivando implicitamente, respecto a x, se tiene
$0 = 2x - 2z\frac{\partial z}{\partial x}$.
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$.
Derivando implicitamente, respecto a y, se tiene
$0 = 2y - 2z\frac{\partial z}{\partial y}$.
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$.
b) $z^2 = e^{xyz}$.
Aplicando logaritmo a ambos miembros, se tiene
$2ln(z) = xyz$
Derivando implicitamente, respecto a x, se tiene
$\frac{2}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$.
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{2/z - xy}$.
Derivando implicitamente, respecto a y, se tiene
$\frac{2}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$.
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{2/z - xy}$.
c) $5 = x + y + z$.
Derivando implicitamente, respecto a x, se tiene
$0 = 1 + \frac{\partial z}{\partial x}$.
$\frac{\partial z}{\partial x} = -1$.
Derivando implicitamente, respecto a y, se tiene
$0 = 1 + \frac{\partial z}{\partial y}$.
$\frac{\partial z}{\partial y} = -1$.
d) $4xyz = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
Derivando implicitamente, respecto a x, se tiene
$4yz + 4xy\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 6z\frac{\partial z}{\partial x}$.
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 4yz}{4xy - 6z}$.
Derivando implicitamente, respecto a y, se tiene
$4xz + 4xy\frac{\partial z}{\partial y} = 4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y}$.
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y - 4xz}{4xy - 6z}$.
2) Hallar el gradiente de las siguientes funciones en cada punto, aplicando derivación implícita.
a) $z^4 = 5x^2 + 9y^2$; en $P(-1,1)$ y $z \leq 0$.
Derivando implicitamente, respecto a x, se tiene
$4z^3\frac{\partial z}{\partial x} = 10x$.
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{10x}{4z^3}$.

Al evaluar en el punto, se obtiene $\frac{-5}{2(14)^{\frac{3}{4}}}$.
Derivando implicitamente, respecto a y, se tiene
$4z^3\frac{\partial z}{\partial y}=18y$.
$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{18y}{4z^3}$.
Al evaluar en el punto, se obtiene $\frac{9}{2(14)^{\frac{3}{4}}}$.
En consecuencia, el vector gradiente es $\nabla z=\frac{-5}{2(14)^{\frac{3}{4}}}\widehat{i}+\frac{9}{2(14)^{\frac{3}{4}}}\widehat{j}$ b) $9x=-8x^2+2y^2-3z^2$; $S(-1,5)$.
Derivando implicitamente, respecto a x, se tiene
$9=-16x-6z\frac{\partial z}{\partial x}$.
$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{9+16x}{6z}$.
Al evaluar en el punto, se obtiene $\frac{7}{6(17)^{\frac{1}{2}}}$.
Derivando implicitamente, respecto a y, se tiene
$0=4y-6z\frac{\partial z}{\partial y}$.
$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y}{6z}$.
Al evaluar en el punto, se obtiene $\frac{10}{3(17)^{\frac{1}{2}}}$.
En consecuencia, el vector gradiente es $\nabla z=\frac{7}{6(17)^{\frac{1}{2}}}\widehat{i}+\frac{10}{3(17)^{\frac{1}{2}}}\widehat{j}$.
3) Dada la función de producción de una compañía, según el modelo de Cobb-Douglas, con un 68% de fuerza laboral y un 32% de capital de insumo, teniendo en cuenta que el factor de productividad es 2.
(a) Defina la función $Q(t,c)$ de Cobb- Douglas.
De acuerdo con la estructura, $Q(t,c)=At^{\alpha}c^{\beta}$, se tiene

$$Q(t,c)=2t^{0.68}c^{0.32}$$

para t y c no negativas.
(b) Determine en el punto $P(80,156000)$, el vector gradiente de productividades marginales e interprete el resultado.
Al derivar con respecto a t, se tiene
$\frac{\partial Q}{\partial t}=2(0.68)t^{-0.32}c^{0.32}$.
Al derivar con respecto a c, se tiene
$\frac{\partial Q}{\partial t}=2(0.32)t^{0.68}c^{-0.68}$.
Evaluando en el punto, se tiene
$\nabla Q=15.3585\widehat{i}+0.0037\widehat{j}$.
Significa que la fuerza de trabajo incide mucho mas fuertemente en la productividad, aunque ambas aumentan la productividad al mantener constante la otra.