Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadśtica
Primer Parcial de Cálculo III ANEC

30 de Agosto de 2019

Nombre____ A

1. Las funciones de demanda para los productos A y B son, cada una, una función de los precios de A y B y están dadas por

$$q_A = \frac{100}{p_A\sqrt{p_B}} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}.$$

Determine si A y B son productos competitivos, productos complementarios o de ninguno de los dos tipos.

2. La función de costos conjuntos para fabricar q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$C = \frac{q_A^2(q_B^3 + q_A)^{1/2}}{17} + q_A q_B^{1/3} + 600$$

donde C está en dólares. Evalúe la función de costo marginal con respecto a q_A cuando $q_A = 17$ y $q_B = 8$.

3. La relación entre la demanda, D, de un bien, su precio, p_1, y el precio medio de los bienes sustitutivos, p_2, viene dada por la ecuación

$$\sqrt{D + 1000} + \frac{5p_2 - 2p_1}{4D} - \frac{1576}{45} = 0.$$

Sabiendo que para $p_1 = 10$ y $p_2 = 8$, la demanda es de 225 unidades. Estudiar si para estos valores dados la demanda decrece al aumentar únicamente el precio medio de los bienes sustitutivos.

4. Suponga que el costo C de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$C = (3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{1/3}.$$

Verifique que

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q_A \partial q_B} = \frac{\partial^2 C}{\partial q_B \partial q_A}.$$

ADVERTENCIA: Durante el desarrollo del examen no se permite el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular apagado y guardado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadśtica
Primer Parcial de Cálculo III ANEC

30 de Agosto de 2019

Nombre____ B

1. Las funciones de demanda para los productos A y B son, cada una, una función de los precios de A y B y están dadas por

$$q_A = \frac{50\sqrt[3]{p_B}}{\sqrt{p_A}} \quad \text{y} \quad q_B = \frac{75p_A}{\sqrt[3]{p_B^2}}.$$

Determine si A y B son productos competitivos, productos complementarios o de ninguno de los dos tipos.

2. La función de costos conjuntos para fabricar q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$C = 600 + q_A q_B^{1/3} + \frac{q_A^2(q_B^3 + q_A)^{1/2}}{17}$$

donde C está en dólares. Evalúe la función de costo marginal con respecto a q_B cuando $q_A = 17$ y $q_B = 8$.

3. La relación entre la demanda, D, de un bien, su precio, p_1, y el precio medio de los bienes sustitutivos, p_2, viene dada por la ecuación

$$\sqrt{D + 1000} + \frac{5p_2 - 2p_1}{4D} = \frac{1576}{45}.$$

Sabiendo que para $p_1 = 10$ y $p_2 = 8$, la demanda es de 225 unidades. Estudiar si para estos valores dados la demanda crece al aumentar únicamente el precio del bien.

4. Suponga que el costo C de producir q_A unidades del producto A y q_B unidades del producto B está dada por

$$C = (3q_B^2 + q_A^3 + 4)^{1/3}.$$

Verifique que

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q_A \partial q_B} = \frac{\partial^2 C}{\partial q_B \partial q_A}.$$

ADVERTENCIA: Durante el desarrollo del examen no se permite el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular apagado y guardado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

SOLUCIÓN

EXAMEN FILA A:

1. Hallamos las demandas marginales del producto A con respecto al precio del producto B y la del producto B con respecto al precio del producto A:

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = -\frac{50}{p_A\sqrt{p_B^3}} < 0$$

y

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = -\frac{500}{3p_B\sqrt[3]{p_A^4}} < 0$$

Como las derivadas parciales son negativas, entonces se concluye que los productos A y B son complementarios.

2. Calculamos la función de costo marginal con respecto a q_A

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = \frac{2q_A(q_B^3+q_A)^{1/2}}{17} + \frac{q_A^2}{34(q_B^3+q_A)^{1/2}} + q_B^{1/3}$$

Evalúamos para $q_A = 17$ y $q_B = 8$, se tiene

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = \frac{2225}{46}$$

Lo anterior implica que al aumentar las unidades del producto A de 17 a 18, mientras se mantiene en 8 las unidades del producto B, los costos conjuntos aumentan en $\frac{2225}{46}$.

3. Derivando implícitamente con respecto a p_2 se tiene

$$\frac{\frac{\partial D}{\partial p_2}}{2(D+1000)^{1/2}} + \frac{20D - 4(5p_2-2p_1)\frac{\partial D}{\partial p_2}}{16D^2} = 0$$

Factorizando $\frac{\partial D}{\partial p_2}$ y despejandolo se obtiene

$$\frac{\partial D}{\partial p_2} = \frac{5D(D+1000)^{1/2}}{(5p_2-2p_1)(D+1000)^{1/2} - 2D^2}$$

Reemplazando los valores $p_1 = 10$, $p_2 = 8$ y $D = 225$ se obtiene

$$\frac{\partial D}{\partial p_2} = -\frac{1575}{4022} < 0$$

Es decir que la demamda decrece al aumentar únicamente el precio medio de los bienes sustitutos.

4. Calculamos la derivada parcial de C con respecto a q_A, obtenemos

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = \frac{2q_A}{(3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{2/3}}$$

Ahora calculamos la derivada parcial de $\dfrac{\partial C}{\partial q_A}$ con respecto a q_B, obtenemos

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q_B \partial q_A} = -\frac{4q_A q_B^2}{(3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{5/3}}$$

Calculamos la derivada parcial de C con respecto a q_B, obtenemos

$$\frac{\partial C}{\partial q_B} = \frac{q_B^2}{(3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{2/3}}$$

Ahora calculamos la derivada parcial de $\dfrac{\partial C}{\partial q_B}$ con respecto a q_A, obtenemos

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q_A \partial q_B} = -\frac{4q_A q_B^2}{(3q_A^2 + q_B^3 + 4)^{5/3}}$$

De donde obtenemos el resultado.

EXAMEN FILA B:

1. Hallamos las demandas marginales del producto A con respecto al precio del producto B y la del producto B con respecto al precio del producto A:

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = \frac{50}{3\sqrt{p_A}\sqrt[3]{p_B^2}} > 0$$

y

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = \frac{75}{\sqrt[3]{p_B^2}} > 0$$

Como las derivadas parciales son positivas, entonces se concluye que los productos A y B son competitivos.

2. Calculamos la función de costo marginal con respecto a q_B

$$\frac{\partial C}{\partial q_B} = \frac{q_A}{3q_B^{2/3}} + \frac{3q_A^2 q_B^2}{34(q_B^3 + q_A)^{1/2}}$$

Evalúamos para $q_A = 17$ y $q_B = 8$, se tiene

$$\frac{\partial C}{\partial q_B} = \frac{4849}{67}$$

Lo anterior implica que al aumentar las unidades del producto B de 8 a 9, mientras se mantiene en 17 las unidades del producto A, los costos conjuntos aumentan en $\dfrac{4849}{67}$.

3. Derivando implícitamente con respecto a p_1 se tiene

$$\frac{\dfrac{\partial D}{\partial p_1}}{2(D+1000)^{1/2}} - \frac{8D + 4(5p_2 - 2p_1)\dfrac{\partial D}{\partial p_1}}{16D^2} = 0$$

Factorizando $\dfrac{\partial D}{\partial p_1}$ y despejandolo se obtiene

$$\frac{\partial D}{\partial p_1} = \frac{2D(D+1000)^{1/2}}{2D^2 - (5p_2 - 2p_1)(D+1000)^{1/2}}$$

Reemplazando los valores $p_1 = 10$, $p_2 = 8$ y $D = 225$ se obtiene

$$\frac{\partial D}{\partial p_1} = \frac{315}{2011} > 0$$

Es decir que la demamda crece al aumentar únicamente el precio del bien.

4. Calculamos la derivada parcial de C con respecto a q_A, obtenemos

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = \frac{q_A^2}{(3q_B^2 + q_A^3 + 4)^{2/3}}$$

Ahora calculamos la derivada parcial de $\dfrac{\partial C}{\partial q_A}$ con respecto a q_B, obtenemos

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q_B \partial q_A} = -\frac{4q_A^2 q_B}{(3q_B^2 + q_A^3 + 4)^{5/3}}$$

Calculamos la derivada parcial de C con respecto a q_B, obtenemos

$$\frac{\partial C}{\partial q_B} = \frac{2q_B}{(3q_B^2 + q_A^3 + 4)^{2/3}}$$

Ahora calculamos la derivada parcial de $\dfrac{\partial C}{\partial q_B}$ con respecto a q_A, obtenemos

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q_A \partial q_B} = -\frac{4q_A^2 q_B}{(3q_B^2 + q_A^3 + 4)^{5/3}}$$

De donde obtenemos el resultado.