

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre Completo _____

Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. [15 pts.] Después que un nuevo producto se ha lanzado al mercado, su volumen de ventas está dado por

$$S = 25 \left(\frac{1 + (1 + 0,01\sqrt{A})T}{4 + T} \right)$$

donde T es el tiempo (en meses) desde que el producto se introdujo por primera vez y A es la cantidad (en dólares) gastada cada mes en publicidad.

- a) Calcule $\frac{\delta S}{\delta A}$ y $\frac{\delta S}{\delta T}$.
- b) Evalúe $\frac{\delta S}{\delta A}$ cuando $T = 1$ y $A = 400$ e interprete.
- c) ¿Qué tiene más impacto en el volumen de ventas: un cambio en el tiempo de 1 mes o un cambio en la cantidad gastada en publicidad de \$1?
2. [15 pts.] Dadas las siguientes ecuaciones de demanda para los productos A y B respectivamente

$$q_A = \frac{30\sqrt{P_B}}{\sqrt[3]{P_A^2}} \quad q_B = \frac{50P_A}{\sqrt[3]{P_B}}$$

Determine si los productos A y B son complementarios, competitivos o ninguno de los dos.

3. [10 pts.] Empleando x trabajadores calificados y y trabajadores no calificados un fabricante puede producir

$$Q(x, y) = 10x^2y + e^{\frac{1}{25}xy}$$

unidades por día. Actualmente hay 10 trabajadores calificados y 25 no calificados en el trabajo.

- a) ¿Cuántas unidades se producen actualmente por día?. (redondee al entero próximo)
- b) ¿Cuánto cambiará el nivel de producción diaria si se agrega un trabajador calificado más a la fuerza laboral actual?
4. [10 pts.] Demuestre que $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{5x^2}{z^3}$, dada la ecuación:

$$z^2 + 5x^2 + y^2 = 0$$

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre Completo _____

Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. [15 pts.] Después que un nuevo producto se ha lanzado al mercado, su volumen de ventas está dado por

$$S = \frac{25}{4+T} + \frac{25(1+0,01\sqrt{A})T}{4+T}$$

donde T es el tiempo (en meses) desde que el producto se introdujo por primera vez y A es la cantidad (en dólares) gastada cada mes en publicidad.

- a) Calcule $\frac{\delta S}{\delta A}$ y $\frac{\delta S}{\delta T}$.
- b) Evalúe $\frac{\delta S}{\delta T}$ cuando $T = 1$ y $A = 300$ e interprete.
- c) ¿Qué tiene más impacto en el volumen de ventas: un cambio en el tiempo de 1 mes o un cambio en la cantidad gastada en publicidad de \$1?
2. [15 pts.] Dadas las siguientes ecuaciones de demanda para los productos A y B respectivamente

$$q_A = \frac{30\sqrt{P_A}}{\sqrt[3]{P_B^2}} \quad q_B = \frac{50P_B}{\sqrt[3]{P_A}}$$

Determine si los productos A y B son complementarios, competitivos o ninguno de los dos.

3. [10 pts.] Empleando x trabajadores calificados y y trabajadores no calificados un fabricante puede producir

$$Q(x, y) = 10x^2y + e^{\frac{1}{15}xy}$$

unidades por día. Actualmente hay 10 trabajadores calificados y 15 no calificados en el trabajo.

- a) ¿Cuántas unidades se producen actualmente por día?. (redondee al entero próximo)
- b) ¿Cuánto cambiará el nivel de producción diaria si se agrega un trabajador no calificado más a la fuerza laboral actual?
4. [10 pts.] Demuestre que $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = \frac{-7x^2}{z^3}$, dada la ecuación:

$$y^2 - 7x^2 + z^2 = 0$$

Solucionario (Mixto):

$$1) a) \frac{\partial S}{\partial A} = \frac{25T}{4+T} \cdot \left(\frac{0,01}{2} A^{-1/2} \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = 25 \left(\frac{(1 + 0,01\sqrt{A})(4+T) - (1 + (1 + 0,01\sqrt{A})T)}{(4+T)^2} \right)$$

$$b) \left. \frac{\partial S}{\partial A} \right|_{\substack{T=1 \\ A=400}} = \frac{25}{4+1} \cdot \left(\frac{0,01}{2} (400)^{-1/2} \right) = \frac{1}{800} = 0,00125.$$

Un aumento de un dólar en publicidad, genera un incremento de 0,00125 en el volumen de ventas.

$$c) \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{\substack{T=1 \\ A=400}} = 25 \left(\frac{(1 + 0,01\sqrt{400})(4+1) - (1 + (1 + 0,01\sqrt{400})T)}{25} \right)$$

$$= 3,8.$$

$$\text{Dado que } \left| \left. \frac{\partial S}{\partial A} \right|_{\substack{T=1 \\ A=400}} \right| < \left| \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{\substack{T=1 \\ A=400}} \right|$$

$$0,00125 < 3,8$$

entonces tiene mayor impacto un cambio en el tiempo de 1 mes.

$$2) \frac{\partial q_A}{\partial P_B} = 30 \cdot \frac{1}{2} P^{-1/2} \cdot P_A^{-2/3} > 0$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = 50 P_B^{-1/3} > 0$$

∴ Los productos A y B son competitivos.

$$3) a) Q(10, 15) = 10(10)^2(15) + e^{\frac{10(15)}{15}}$$

$$= 15000 + e^{10}$$

$$\approx 37000.$$

$$b) Q_y = 10x^2 + \frac{x e^{\frac{xy}{15}}}{15}$$

$$Q_y(10, 15) = 10(10)^2 + \frac{10}{15} e^{\frac{150}{15}}$$

$$= 1000 + \frac{10}{15} e^{10}$$

$$= 15684,31 \approx 15000.$$

La producción aumenta en 15684,31 si se aumenta en una unidad la fuerza laboral.

$$4) y^2 - 7x^2 + z^2 = 0$$

$$2y + 2z \cdot z_y = 0$$

$$z_y = -\frac{2y}{2z}$$

$$\boxed{z_y = -\frac{y}{z}}$$

$$z_{yy} = \frac{-z - (-y)z_y}{z^2}$$

$$= \frac{-z + y\left(-\frac{y}{z}\right)}{z^2}$$

$$= \frac{-z^2 - y^2}{z^3}$$

$$= \frac{-(z^2 + y^2)}{z^3} = -\frac{7x^2}{z^3}$$