Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 202010
Fila A
Febrero 21 de 2020

Nombre completo:________________________________ Código:________________________________

1. **[7 pts]** La producción de cierta fábrica es $Q(k,l) = 120k^{2/3}l^{1/3}$ unidades, donde k es la inversión de capital, medida en unidades de \$1 000, y l es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.

   (a) [4 pts] Calcule la producción si la inversión de capital es \$125 000 y la fuerza laboral es de 1 331 horas-trabajador.

   (b) [3 pts] ¿Qué ocurrirá a la producción del inciso (a) si tanto el nivel de la inversión de capital como la fuerza laboral se reducen a la mitad?

---

2. **[10 pts]** La utilidad diaria de un abarrotero por la venta de dos marcas de comida para gato es

$$U(x,y) = (x-30)(70-5x+4y) + (y-40)(80+6x-7y)$$

centavos, donde x es el precio por lata de la primera marca y y es el precio por lata de la segunda marca. Actualmente, la primera marca se vende en 50 centavos por lata y la segunda en 52 centavos por lata. Utilice el análisis marginal para estimar el cambio en la utilidad diaria que resultará si el abarrotero sube en dos centavos por lata el precio de la segunda lata, pero mantiene sin cambio el precio de la primera marca.

---

3. **[10 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por

$$q_A = 10\sqrt{\frac{p_B}{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = 3\sqrt[5]{\frac{p_A}{p_B}}.$$

Indique si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

---

4. **[15 pts]** Considere la ecuación $se^{r^2+u^2} = u\ln(t^2+1)$. Usando el método de diferenciación implícita verifique que

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{(t^2+1)[2sue^{r^2+u^2} - \ln(t^2+1)]}{2tu}.$$

---

5. **[8 pts]** Para la función $u(x,y) = xe^{x-y} + ye^{y-x}$, muestre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x-y} + e^{y-x}.$$

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Parcial I - fila A

Cálculo III (ANEC)

① a) $Q(125, 1331) = 120(125)^{2/3}(1331)^{1/3}$

$= 33000$

b) $k = \frac{125}{2} \wedge l = \frac{1331}{2}$

$Q\left(\frac{125}{2}, \frac{1331}{2}\right) = 120\left(\frac{125}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{1331}{2}\right)^{1/3}$

$= 16500.$

En este caso, la producción queda reducida a la mitad con respecto al inciso a).

② $\frac{\partial U}{\partial y} = (x-30)\cdot 4 + 1\cdot(80+6x-7y) + (y-40)(-7)$

$\rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{x=50\\y=52}} = 12.$

Si el abarrotero sube en dos centavos por lata el precio de la segunda lata, entonces su utilidad aumenta aprox. en $2\cdot 12 = 24$ centavos.

③ $q_A = 10\, P_A^{-1/2} P_B^{1/2} \wedge q_B = 3\, P_A^{1/5} P_B^{-1/5}$

$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = 5\, P_A^{-1/2} P_B^{-1/2} > 0$

$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = \frac{3}{5} P_A^{-4/5} P_B^{-1/5} > 0.$

Los productos A y B son competitivos

④ $\underbrace{se^{r^2+u^2} - u\ln(t^2+1) = 0}_{F(r,s,t,u).}$

$\frac{\partial t}{\partial u} = -\frac{F_u}{F_t}$

$= -\frac{se^{r^2+u^2}\cdot 2u - \ln(t^2+1)}{\frac{-u}{t^2+1}\cdot 2t}$

$= \frac{(t^2+1)\left[2sue^{r^2+u^2} - \ln(t^2+1)\right]}{2tu}$

⑤ $u = xe^{x-y} + ye^{y-x}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1\cdot e^{x-y} + xe^{x-y}\cdot 1 + ye^{y-x}\cdot(-1)$

$= e^{x-y} + xe^{x-y} - ye^{y-x}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{x-y}\cdot(-1) + 1\cdot e^{y-x} + ye^{y-x}\cdot 1$

$= -xe^{x-y} + e^{y-x} + ye^{y-x}$

Entonces,

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x-y} \cancel{+xe^{x-y}} \cancel{-ye^{y-x}} \cancel{-xe^{x-y}} + e^{y-x} \cancel{+ye^{y-x}}$

$= e^{x-y} + e^{y-x}.$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Primer parcial de Cálculo III ANEC 202010
Fila B
Febrero 21 de 2020

Nombre completo:______________________ Código:______________________

1. **[7 pts]** La producción de cierta fábrica es $Q(k,l) = 60k^{1/3}l^{2/3}$ unidades, donde k es la inversión de capital, medida en unidades de \$1 000, y l es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.
   (a) [4 pts] Calcule la producción si la inversión de capital es \$64 000 y la fuerza laboral es de 2 197 horas-trabajador.
   (b) [3 pts] ¿Qué ocurrirá a la producción del inciso (a) si tanto el nivel de la inversión de capital como la fuerza laboral se reducen a la mitad?

---

2. **[10 pts]** La utilidad diaria de un abarrotero por la venta de dos marcas de comida para gato es
$$U(x,y) = (x-40)(80-7x+6y) + (y-30)(70+4x-5y)$$
centavos, donde x es el precio por lata de la primera marca y y es el precio por lata de la segunda marca. Actualmente, la primera marca se vende en 50 centavos por lata y la segunda en 52 centavos por lata. Utilice el análisis marginal para estimar el cambio en la utilidad diaria que resultará si el abarrotero sube en dos centavos por lata el precio de la segunda lata, pero mantiene sin cambio el precio de la primera marca.

---

3. **[10 pts]** Las ecuaciones de demanda para los productos relacionados A y B están dadas por
$$q_A = 5\sqrt[3]{\frac{p_B}{p_A}} \qquad \text{y} \qquad q_B = 10\sqrt{\frac{p_A}{p_B}}.$$
Indique si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

---

4. **[15 pts]** Considere la ecuación $se^{r^2+u^2} = u\ln(t^2+1)$. Usando el método de diferenciación implícita verifique que
$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\ln(t^2+1) - 2sue^{r^2+u^2}}{2rse^{r^2+u^2}}.$$

---

5. **[8 pts]** Para la función $f(x,y) = ye^{y-x} + xe^{x-y}$, muestre que
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y-x} + e^{x-y}.$$

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Parcial I - fila B

Cálculo III (ANEC)

① $Q(64,2197) = 60(64)^{1/3}(2197)^{2/3}$

a) $= 40560$

b) $k = \frac{64}{2} \wedge l = \frac{2197}{2}$

$$Q\left(\frac{64}{2}, \frac{2197}{2}\right) = 60\left(\frac{64}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{2197}{2}\right)^{2/3} = 20280$$

En este caso, la producción queda reducida a la mitad con respecto al inciso a).

② $$\frac{\partial U}{\partial y} = (x-40)\cdot 6 + 1\cdot(70+4x-5y) + (y-30)(-5)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{x=50\\ y=52}} = -40$$

Si el abarrotero sube en dos centavos por lata el precio de la segunda lata, entonces su utilidad disminuye aprox. en $2\cdot 40 = 80$ centavos.

③ $q_A = 5\, p_A^{-1/3} p_B^{1/3} \wedge q_B = 10\, p_A^{1/2} p_B^{-1/2}$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = \frac{5}{3} p_A^{-1/3} p_B^{-2/3} > 0$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 5\, p_A^{-1/2} p_B^{-1/2} > 0.$$

Los productos A y B son competitivos.

④ $$\underbrace{s e^{r^2+u^2} - u\ln(t^2+1)}_{F(r,s,u,t)} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = -\frac{F_u}{F_r} = -\frac{s e^{r^2+u^2}\cdot 2u - \ln(t^2+1)}{s e^{r^2+u^2}\cdot 2r} = \frac{\ln(t^2+1) - 2su\, e^{r^2+u^2}}{2rs\, e^{r^2+u^2}}$$

⑤ $f(x,y) = y e^{y-x} + x e^{x-y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{y-x}\cdot(-1) + 1\cdot e^{x-y} + x e^{x-y}\cdot 1 = -y e^{y-x} + e^{x-y} + x e^{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1\cdot e^{y-x} + y\cdot e^{y-x}\cdot 1 + x e^{x-y}\cdot(-1) = e^{y-x} + y e^{y-x} - x e^{x-y}$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{-y e^{y-x}} + e^{x-y} + \cancel{x e^{x-y}} + e^{y-x} + \cancel{y e^{y-x}} - \cancel{x e^{x-y}} = e^{y-x} + e^{x-y}.$$