Parcial II - CALCULO III - ANEC   6 de abril de 2022

Duración de la prueba: 1 hora y 20 minutos.

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre completo ____

1. [**1.50 pts.**] Usando la regla de la cadena, encuentre $\frac{\delta w}{\delta t}$ para la función dada a acontinuación.

$$w = e^{xyz} + 3xy^7 \qquad x = r + 3t, \quad y = 2t^5, \quad z = 2 - 3r^2.$$

2. [**1.75 pts.**] Una empresa produce dos tipos de productos, A y B. El costo diario total (en dólares) de producir x unidades de A y y unidades de B está dado por

$$C(x; y) = 250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2.$$

Determine el número de unidades de A y B que la empresa debe producir al día con el propósito de minimizar el costo total.

   a) Justifique su respuesta usando la prueba de la segunda derivada.

3. [**1.75 pts.**] El costo de producir x modelos regulares y y modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la función conjunta de costo $C(x; y) = x^2 + 1,5y^2 + 300$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse para minimizar los costos totales, si la empresa decide producir un total de 200 unidades?

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Duración de la prueba: 1 hora y 20 minutos.

ADVERTENCIA: Durante la realización del examen no se acepta el uso de calculadoras graficadoras y debe mantener el celular en silencio o apagado. El incumplimiento de esta advertencia será causal de anulación del examen.

Nombre completo ______________________________

1. [**1.75 pts.**] El costo de producir x modelos regulares y y modelos de lujo del producto de una empresa está dado por la función conjunta de costo $C(x;y) = x^2 + 1,5y^2 + 300$. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse para minimizar los costos totales, si la empresa decide producir un total de 500 unidades?

2. [**1.50 pts.**] Usando la regla de la cadena, encuentre $\frac{\delta w}{\delta r}$ para la función dada a acontinuación.

$$w = e^{xz} + 3xy^7 \qquad x = 2r + 3t, \quad y = 2t^5, \quad z = 2 - 3r^2.$$

3. [**1.75 pts.**] Si x denota la producció de la empresa (en cientos) y y la cantidad gastada (en miles de dólares) en los esfuerzos promocionales de vender el producto, entonces la utilidad de la empresa P (en miles de dólares) está dada por $P(x;y) = 16x + 12y + 2xy - x^2 - 2y^2 - 7$ ¿Qué valores de x y y producirán la utilidad máxima?

   a) Justifique su respuesta usando la prueba de la segunda derivada.

The End.

Solucionario

1) $$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \left(e^{xyz} \cdot (yz) + 3y^7\right)(3) + \left(e^{xyz}(xz) + 21xy^6\right)(10T^4) +$$

$$\left(e^{xyz}(xy)\right)(0)$$

$$= 3y\left(ze^{xyz} + 3y^6\right) + 10xT^4\left(ze^{xyz} + 21y^6\right) \blacksquare$$

2) Calculamos puntos críticos:

$$\begin{cases} C_x = -4 + 0{,}4x = 0 \\ C_y = -7 + 0{,}2y = 0 \end{cases}$$

entonces $-4 + 0{,}4x = 0$, $-7 + 0{,}2y = 0$

$0{,}4x = 4$ $\quad$ $0{,}2y = 7$

$x = \dfrac{4}{0{,}4}$ $\quad$ $y = \dfrac{7}{0{,}2}$

$x = 10$ $\quad$ $y = 35$

→ el punto crítico es $(10, 35)$

Ahora determinamos las segundas derivadas para generar la función $D(x,y) = C_{xx}C_{yy} - (C_{xy})^2$

$C_{xx} = 0{,}4$

$C_{yy} = 0{,}2$ $\rightarrow$ $D(x,y) = (0{,}4)(0{,}2) - 0^2$

$C_{xy} = 0$ $\quad = 0{,}08$

Evaluemos el punto crítico en $D(x,y)$

$$D(10,35) = 0{,}08 > 0$$

y ahora en $C_{xx}(10,35) = 0{,}4 > 0$

Por la prueba de la segunda derivada, concluimos que 10 unidades del producto A y 35 unidades del producto B generan un costo mínimo.

3) $\begin{cases} \text{función a minimizar: } C(x,y) = x^2 + 1{,}5\,y^2 + 300 \\ \text{restricción: } x + y = 200 \end{cases}$

utilizando multiplicadores de Lagrange, usamos la nueva función

$$F(x, y, \lambda) = C(x,y) - \lambda(x + y - 200)$$

luego $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$ esto es $\begin{cases} F_x = 2x - \lambda = 0 & ① \\ F_y = 3y - \lambda = 0 & ② \\ F_\lambda = -x - y + 200 = 0 & ③ \end{cases}$

1

De ① y ②, igualando:

$\lambda = 2x \qquad \lambda = 3y$

$2x = 3y$

$x = \dfrac{3y}{2}$

Sustituyendo $x = \dfrac{3y}{2}$ en ③:

$-x - y + 200 = 0$

$-\dfrac{3y}{2} - y = -200$

$-5y = -400$

$\boxed{y = 80}$

luego de $x = \dfrac{3y}{2}$,

$x = \dfrac{3(80)}{2}$

$\boxed{x = 120}$

$\therefore$ Se deben producir 120 modelos regulares y 80 de lujo para minimizar los costos totales.

Escaneado con CamScanner

1) $\begin{cases} \text{función a minimizar: } & C(x,y) = x^2 + 1{,}5y^2 + 300 \\ \text{restricción: } & x + y = 500 \end{cases}$

Usando multiplicadores de Lagrange, generamos la función

$$F(x,y,\lambda) = (x^2 + 1{,}5y^2 + 300) - \lambda(x + y - 500)$$

luego calculando las derivadas parciales de F, e igualandolas a cero, obtenemos el punto crítico:

$$\begin{cases} F_x = 2x - \lambda = 0 & (1) \\ F_y = 3y - \lambda = 0 & (2) \\ F_\lambda = -x - y + 500 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) y (2) despejamos λ e igualamos:

(1) $\lambda = 2x$ (2) $\lambda = 3y$

$\rightarrow 2x = 3y$

$x = \frac{3y}{2}$

Sustituyendo $x = \frac{3y}{2}$ en (3)

$$-\frac{3y}{2} - y + 500 = 0$$

$$\frac{-3y - 2y}{2} = -500 \longrightarrow$$

$\longrightarrow -5y = -1000$

$\boxed{y = 200}$

luego $x = \frac{3(200)}{2}$

$\boxed{x = 300}$

$\therefore$ Se deben producir 300 modelos regulares y 200 modelos de lujo.

$$2)\quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \left(e^{xz}(z) + 3y^7\right)(2) + \left(21xy^6\right)(0) + \left(e^{xz}(x)\right)(-6r)$$

$$= 2\left(ze^{xz} + 3y^7\right) - 6r\left(xe^{xz}\right) \quad \blacksquare$$

3) Calculamos los puntos críticos, tomando las derivadas parciales e igualándolas a cero

$$\begin{cases} P_x = 16 + 2y - 2x = 0 & (1) \\ P_y = 12 + 2x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

sumando (1) y (2):

$$28 - 2y = 0$$

$$\boxed{y = 14}$$

Sustituimos $y = 14$ en (1) o en (2)

(1): $16 + 2(14) - 2x = 0$

$$28 - 2x = -16$$

$$-2x = -44$$

$$\boxed{x = 22}$$

Para la prueba de la segunda derivada, obtenemos:

$$P_{xx} = -2 \qquad P_{yy} = -4$$

$$P_{xy} = 2$$

luego $D(x,y) = P_{xx}P_{yy} - (P_{xy})^2$

$$= (-2)(-4) - (2)^2$$

$$= 8 - 4$$

$$D(x,y) = 4 > 0 \quad \forall (x,y)$$

Entonces $D(22,14) = 4 > 0$ y

$$P_{xx}(22,14) = -2 < 0$$

esto es existe utilidad máxima para $x = 22$ y 14.

The End.