UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Parcial 2 de Cálculo III ANEC
Docente: Francisco Arias Dominguez
01 de abril de 2022

Alumno:____________________________________ Código:__________________Fila: A

`Observaciones.`
`Duración del examen: 90 Minutos. Es prohibido el préstamo de objetos durante el examen. Es prohibido el uso o poseción de dispositivos electrónicos. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.`

---

1. (1.5 ptos) Si $z = x^2 + xy + y^2$, donde $x = (r+t)^2$ y $y = (rt)^2$. Use regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ cuando $r = 1$ y $t = -1$.

---

2. (2.0 pto) El total de los ingresos semanales (en dólares) que Acrosonic obtiene al fabricar y vender sus sistemas de estantes con altavoces está dada por:

$$I(x,y) = -\frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y.$$

donde x denota el número completo de unidades ensambladas y y el número de kits fabricados y vendidos cada semana. El total del costo semanal atribuible a la fabricación de estos altavoces es

$$C(x,y) = 180x + 140y + 5000, \quad \text{(en dólares)}$$

en donde x y y tienen el mismo significado como antes. Determine cuántas unidades ensambladas y cuántos kits debería fabricar Acrosonic por semana para maximizar sus utilidades.

---

3. (1.5 ptos) La producción P, como función de dos insumos x y y, está dada por

$$P(x,y) = y^2 + 5xy - 4x^2.$$

Evaluar las cantidades de x y de y que maximizan la producción si $3x + 2y = 74$.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Parcial 2 de Cálculo III ANEC
Docente: Francisco Arias Dominguez
01 de abril de 2022

Alumno:____ Código:________________Fila: B

`Observaciones.`
`Duración del examen: 90 Minutos. Es prohibido el préstamo de objetos durante el examen. Es prohibido el uso o poseción de dispositivos electrónicos. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.`

---

1. (1.5 ptos) Si $z = x^2 + xy + y^2$, donde $x = (r+t)^2$ y $y = (rt)^2$. Use regla de la cadena para evaluar $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ cuando $r = 1$ y $t = -1$.

---

2. (2.0 pto) El total de los ingresos semanales (en dólares) que Acrosonic obtiene al fabricar y vender sus sistemas de estantes con altavoces está dada por:

$$I(x,y) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y.$$

donde x denota el número completo de unidades ensambladas y y el número de kits fabricados y vendidos cada semana. El total del costo semanal atribuible a la fabricación de estos altavoces es

$$C(x,y) = 180x + 140y + 5000, \quad \text{(en dólares)}$$

en donde x y y tienen el mismo significado como antes. Determine cuántas unidades ensambladas y cuántos kits debería fabricar Acrosonic por semana para maximizar sus utilidades.

---

3. (1.5 ptos) La producción P, como función de dos insumos x y y, está dada por

$$P(x,y) = x^2 + 5xy - 4y^2.$$

Evaluar las cantidades de x y de y que maximizan la producción si $2x + 3y = 74$.

Solución del segundo parcial (Fila A)

1) (1.5) Si $z = x^2 + xy + y^2$, donde $x = (r+t)^2$ y $y = (rt)^2$. Use regla de la cadena para calcular: $\frac{\partial z}{\partial t} =?$, cuando $r = 1$ y $t = -1$.

Hallemos $\frac{\partial z}{\partial t}$, aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= (2x+y)2(r+t) + (x+2y)(2r^2t) \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= 2(2x+y)(r+t) + 2(x+2y)(r^2t)
\end{aligned}$$

Cuando $r = 1$ y $t = -1$, tenemos que $x = 0$ y $y = 1$. Luego

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{r=1,t=-1} &= 2(2(0)+1)(1-1) + 2(0+2(1))((1)^2(-1)) \\
\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{r=1,t=-1} &= 2(1)(0) + 2(2)(-1) \\
\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{r=1,t=-1} &= -4 \quad (\textbf{solución fila A})
\end{aligned}$$

2) (2.0) Hallemos la función a optimizar, en este caso es la función de utilidad. Luego

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= I(x,y) - C(x,y) \\
U(x,y) &= \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y\right) - (180x + 140y + 5000) \\
U(x,y) &= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y - 180x - 140y - 5000 \\
U(x,y) &= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000 \ (\textbf{función de utilidad})
\end{aligned}$$

Hallemos los puntos críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 120 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 100 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 480 & \textbf{(1)} \\ x + 3y = 400 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Cuya solución del sistema lineal (1)-(2) es $x = 208$ e $y = 64$. Es decir, el único **punto crítico** es $(208, 64)$.
Ahora, definimos la función

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 \\
D(x,y) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\
D(x,y) &= \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

Luego, $D(208, 64) = \frac{5}{16} > 0$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(208, 64) = -\frac{1}{2} < 0$, en $(208, 64)$ la función tiene un máximo relativo.
R.ta: Se deben ensamblar 208 unidades y 64 kits, para que la fábrica Acrosonic maximice sus utilidades semanalmente.

3) (1.5) Problema: Maximizar la función $P(x,y) = y^2 + 5xy - 4x^2$, sujeta a la condición $g(x,y) = 3x + 2y = 74$.
Aplicando multiplicadores de Lagrange, hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \lambda\frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 74 \end{cases} \implies \begin{cases} 5y - 8x = \lambda(3) \\ 2y + 5x = \lambda(2) \\ 3x + 2y = 74 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{5y-8x}{3} = \lambda & \textbf{(1)} \\ \frac{2y+5x}{2} = \lambda & \textbf{(2)} \\ 3x + 2y = 74 & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{5y - 8x}{3} &= \frac{2y + 5x}{2} \\
2(5y - 8x) &= 3(2y + 5x) \\
10y - 16x &= 6y + 15x \\
4y &= 31x \\
y &= \frac{31}{4}x \qquad \textbf{(4)}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (4) en la ecuación (3), tenemos

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 74 \\ 3x + 2\left(\frac{31}{4}x\right) &= 74 \\ 3x + \frac{31}{2}x &= 74 \\ \frac{37}{2}x &= 74 \\ x &= \frac{2(74)}{37} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Como $y = \frac{31}{4}x = \frac{31}{4}(4) = 31$.
R.ta: Las cantidades x e y que maximizan la producción es $x = 4$ y $y = 31$.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Solución del segundo parcial (Fila B)
1) Si $z = x^2 + xy + y^2$, donde $x = (r+t)^2$ y $y = (rt)^2$. Use regla de la cadena para calcular: $\frac{\partial z}{\partial r}$ =?, cuando $r = 1$ y $t = -1$.
Hallemos $\frac{\partial z}{\partial r}$, aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= (2x+y)2(r+t) + (x+2y)(2rt^2) \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= 2(2x+y)(r+t) + 2(x+2y)(rt^2) \end{aligned}$$

Cuando $r = 1$ y $t = -1$, tenemos que $x = 0$ y $y = 1$. Luego

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial z}{\partial r}\right|_{r=1,t=-1} &= 2(2(0)+1)(1-1) + 2(0+2(1))((1)(-1)^2) \\ \left.\frac{\partial z}{\partial r}\right|_{r=1,t=-1} &= 2(1)(0) + 2(2)(1) \\ \left.\frac{\partial z}{\partial r}\right|_{r=1,t=-1} &= 4 \quad (\textbf{solución fila B}) \end{aligned}$$

2) (2.0) Hallemos la función a optimizar, en este caso es la función de utilidad. Luego

$$\begin{aligned} U(x,y) &= I(x,y) - C(x,y) \\ U(x,y) &= \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y\right) - (180x + 140y + 5000) \\ U(x,y) &= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 300x + 240y - 180x - 140y - 5000 \\ U(x,y) &= -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}y^2 - \frac{1}{4}xy + 120x + 100y - 5000 \ (\textbf{función de utilidad}) \end{aligned}$$

Hallemos los puntos críticos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 120 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}x + 100 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} 2x + y = 480 & \textbf{(1)} \\ x + 3y = 400 & \textbf{(2)} \end{array} \right.$$

Cuya solución del sistema lineal (1)-(2) es $x = 208$ e $y = 64$. Es decir, el único **punto crítico** es $(208, 64)$.
Ahora, definimos la función

$$\begin{aligned} D(x,y) &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2 \\ D(x,y) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \\ D(x,y) &= \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

Luego, $D(208,64)=\frac{5}{16}>0$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(208,64)=-\frac{1}{2}<0$, en $(208,64)$ la función tiene un máximo relativo.
R.ta: Se deben ensamblar 208 unidades y 64 kits, para que la fábrica Acrosonic maximice sus utilidades semanalmente.

3) (1.5) Problema: Maximizar la función $P(x,y)=x^2+5xy-4y^2$, sujeta a la condición $g(x,y)=2x+3y=74$.
Aplicando multiplicadores de Lagrange, hay que resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial P}{\partial x}=\lambda\frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y}=\lambda\frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y)=74 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+5y=\lambda(2) \\ 5x-8y=\lambda(3) \\ 2x+3y=74 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lc} \frac{2x+5y}{2}=\lambda & \textbf{(1)} \\ \frac{5x-8y}{3}=\lambda & \textbf{(2)} \\ 2x+3y=74 & \textbf{(3)} \end{array}\right.$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2), tenemos

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{2x+5y}{2} &=& \dfrac{5x-8y}{3} & \\ 3(2x+5y) &=& 2(5x-8y) & \\ 6x+15y &=& 10x-16y & \\ 31y &=& 4x & \\ \dfrac{31}{4}y &=& x & \qquad \textbf{(4)} \end{array}$$

Sustituyendo (4) en la ecuación (3), tenemos

$$\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& 74 \\ 2\left(\dfrac{31}{4}y\right)+3y &=& 74 \\ \dfrac{31}{2}y+3y &=& 74 \\ \dfrac{37}{2}y &=& 74 \\ y &=& \dfrac{2(74)}{37} \\ y &=& 4 \end{array}$$

Como $x=\frac{31}{4}y=\frac{31}{4}(4)=31$.
R.ta: Las cantidades x e y que maximizan la producción es $x=31$ y $y=4$.