UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 202210
Fila A
Abril 2 de 2022

Nombre completo:________________________________ Código:________________________________

1. **[15 pts]** Una compañía determina que el costo $C(x, y)$ de producir x unidades de un producto A, y y unidades de un producto B está dado por

$$C(x, y) = (3x^2 + 4y + 2)^{1/2},$$

donde las funciones de demanda están dadas por

$$x = 2r + 4s - 15,$$
$$y = r - 3s + 8,$$

siendo r y s los precios de A y B, respectivamente. Use la **regla de cadena** para determinar el costo marginal con respecto al precio de B cuando $r = 2$ y $s = 3$.

---

2. **[20 pts]** La compañía occidental de dulces produce caramelos en dos tamaños a costos unitarios de 10 centavos y 20 centavos cada uno. Las demandas semanales q_A y q_B (en miles) para los dos tamaños están dadas por $q_A = p_B - p_A$ y $q_B = 60 + p_A - 3p_B$, donde p_A y p_B denotan los precios en centavos de los caramelos en los dos tamaños.

   (a) [8 pts] Verifique que la utilidad de la compañía está dada por

$$U(p_A, p_B) = -p_A^2 - 3p_B^2 + 2p_Ap_B - 10p_A + 110p_B - 1\,200.$$

   (b) [12 pts] Determine los precios p_A y p_B que maximizarían las utilidades de la compañía.

---

3. **[15 pts]** Una empresa ha recibido una orden de 200 unidades para uno de sus productos. El pedido será surtido con la producción combinada de sus dos plantas. La función conjunta de costo de la fabricación de este producto es

$$C(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 500$$

donde x y y son las cantidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. Si el objetivo es minimizar los costos totales, sujeto a la condición de suministrar 200 unidades procedentes de ambas plantas, ¿qué cantidades deberá proporcionar cada una?

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución de la fila A

1) $C(x,y) = (3x^2+4y+2)^{1/2}$

$x = 2r+4s-15$

$y = r-3s+8$

$$\frac{\partial C}{\partial s} = \frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial C}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

- $\frac{\partial C}{\partial x} = 3x(3x^2+4y+2)^{-1/2}$ • $\frac{\partial x}{\partial s} = 4$
- $\frac{\partial C}{\partial y} = 2(3x^2+4y+2)^{-1/2}$ • $\frac{\partial y}{\partial s} = -3$

Cuando $r=2$ y $s=3$, tenemos que $x=1$ y $y=1$. Por tanto,

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 2/3.$$

Luego,

$$\left.\frac{\partial C}{\partial s}\right|_{\substack{r=2\\ s=3}} = 1\cdot 4 + \frac{2}{3}\cdot(-3) = 2.$$

2) Si U es la utilidad de la compañía, entonces

ⓐ

$$U = (P_A-10)\,q_A + (P_B-20)\,q_B$$

$$= (P_A-10)(P_B-P_A)$$

$$+ (P_B-20)(60+P_A-3P_B)$$

$$= -P_A^2 - 3P_B^2 + 2P_AP_B - 10P_A + 110P_B - 1200$$

ⓑ $\frac{\partial U}{\partial P_A} = -2P_A + 2P_B - 10$

$\frac{\partial U}{\partial P_B} = -6P_B + 2P_A + 110$

La solución del sistema

$$\begin{cases} -2P_A + 2P_B - 10 = 0 \\ 2P_A - 6P_B + 110 = 0 \end{cases}$$

es $P_A = 20 \wedge P_B = 25$. Ahora bien,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P_A^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial P_B^2} = -6 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial P_A \partial P_B} = 2.$$

Entonces

$$D(20,25) = \frac{\partial^2 U}{\partial P_A^2}(20,25)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial P_B^2}(20,25) - \left[\frac{\partial^2 U}{\partial P_A\partial P_B}(20,25)\right]^2$$

$$= (-2)\cdot(-6) - (2)^2 > 0.$$

Como $D(20,25) > 0$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial P_A^2}(20,25) < 0$, entonces la utilidad es máxima cuando $P_A = 20 \wedge P_B = 25$.

3) $C(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 + 500$; $x+y = 200$.

Considérese,

$$F(x,y,\lambda) := 2x^2 + xy + y^2 + 500 - \lambda(x+y-200)$$

Las derivadas parciales de F son:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x + y - \lambda \;;\; \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - y + 200.$$

La solución del sistema

$$\begin{cases} 4x + y - \lambda = 0 \\ x + 2y - \lambda = 0 \\ -x - y + 200 = 0 \end{cases}$$

es $x = 50$, $y = 150$ y $\lambda = 350$. Entonces, la función de costos bajo la restricción tiene un punto crítico en $(50,150)$.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 202210
Fila B
Abril 2 de 2022

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[15 pts]** Una compañía determina que el costo $C(x, y)$ de producir x unidades de un producto A, y y unidades de un producto B está dado por

$$C(x, y) = (4x + 3y^2 + 2)^{1/2},$$

donde las funciones de demanda están dadas por

$$x = 3r + 6s - 32,$$
$$y = r - 4s + 14,$$

siendo r y s los precios de A y B, respectivamente. Use la **regla de cadena** para determinar el costo marginal con respecto al precio de A cuando $r = 3$ y $s = 4$.

---

2. **[20 pts]** Toys es una empresa de juguetes que produce dos tipos diferentes de cochecitos de plástico con un costo de 10 centavos y 30 centavos cada uno. Las demandas anuales q_A y q_B (en miles) están dadas por $q_A = 30 + 2p_B - 5p_A$ y $q_B = 100 + p_A - 2p_B$, donde p_A y p_B son los precios unitarios (en centavos) de los dos tipos de cochecitos.

   (a) [8 pts] Verifique que la utilidad de la empresa está dada por

$$U(p_A, p_B) = -5p_A^2 - 2p_B^2 + 3p_A p_B + 50p_A + 140p_B - 3\,300.$$

   (b) [12 pts] Determine los precios p_A y p_B que maximizarían las utilidades de la empresa.

---

3. **[15 pts]** Una empresa ha recibido una orden de 300 unidades para uno de sus productos. El pedido será surtido con la producción combinada de sus dos plantas. La función conjunta de costo de la fabricación de este producto es

$$C(x, y) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 800$$

donde x y y son las cantidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. Si el objetivo es minimizar los costos totales, sujeto a la condición de suministrar 300 unidades procedentes de ambas plantas, ¿qué cantidades deberá proporcionar cada una?

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución de la fila B

1) $C(x,y) = (4x+3y^2+2)^{1/2}$

$x = 3r+6s-32$

$y = r-4s+14$

$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial C}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$

• $\frac{\partial C}{\partial x} = 2(4x+3y^2+2)^{-1/2}$ • $\frac{\partial x}{\partial r} = 3$

• $\frac{\partial C}{\partial y} = 3y(4x+3y^2+2)^{-1/2}$ • $\frac{\partial y}{\partial r} = 1$

Cuando $r=3$ y $s=4$, tenemos que $x=1$ y $y=1$. Por tanto,

$\frac{\partial C}{\partial x} = 2/3$ y $\frac{\partial C}{\partial y} = 1$.

Luego,

$$\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{\substack{r=3\\ s=4}} = \frac{2}{3}\cdot 3 + 1\cdot 1 = 3$$

2) Si U es la utilidad de la compañía, entonces

ⓐ

$U = (P_A-10)q_A + (P_B-30)q_B$

$= (P_A-10)(30+2P_B-5P_A)$

$+ (P_B-30)(100+P_A-2P_B)$

$= -5P_A^2 - 2P_B^2 + 3P_AP_B + 50P_A + 140P_B - 3300$

ⓑ $\frac{\partial U}{\partial P_A} = -10P_A + 3P_B + 50$

$\frac{\partial U}{\partial P_B} = -4P_B + 3P_A + 140$

La solución del sistema

$$\begin{cases} -10P_A + 3P_B + 50 = 0 \\ 3P_A - 4P_B + 140 = 0 \end{cases}$$

es $P_A = 20$ y $P_B = 50$. Ahora bien,

$\frac{\partial^2 U}{\partial P_A^2} = -10$ $\frac{\partial^2 U}{\partial P_B^2} = -4$ $\frac{\partial^2 U}{\partial P_A \partial P_B} = 3$

Entonces,

$$D(20,50) = \frac{\partial^2 U}{\partial P_A^2}(20,50)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial P_B^2}(20,50) - \left[\frac{\partial^2 U}{\partial P_A\partial P_B}(20,50)\right]^2$$

$$= (-10)(-4) - (3)^2 > 0.$$

Como $D(20,50) > 0$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial P_A^2} < 0$, entonces la utilidad es máxima cuando $P_A = 20 \wedge P_B = 50$.

3) $C(x,y) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 800$; $x+y = 300$.

Considérese,

$F(x,y,\lambda) := 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 800 - \lambda(x+y-300)$

Las derivadas parciales de F son:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x + 2y - \lambda$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 8y - \lambda$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - y + 300$

La solución del sistema

$$\begin{cases} 6x + 2y - \lambda = 0 \\ 2x + 8y - \lambda = 0 \\ -x - y + 300 = 0 \end{cases}$$

es $x = 180$, $y = 120$ y $\lambda = 1320$. Entonces, la función de costos bajo la restricción tiene un punto crítico en $(180, 120)$.