Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 202230
Fila A
Septiembre 24 de 2022

Nombre completo:________________________ Código:________________________

Realice sólo tres puntos. Los ejercicios 1 y 2 son obligatorios.

1. **[15 pts]** Determine la derivada parcial $\partial z/\partial u$ de la función $z = x^2 + xy^3$, donde $x = uv^2 + w^3$ y $y = u + ve^w$ cuando $u = 2,\ v = 1$ y $w = 0$.

---

2. **[20 pts]** El total de los ingresos semanales (en dólares) que Acrosonic obtiene al fabricar y vender sus sistemas de estantes con altavoces está dada por

$$I(x, y) = -2x^2 - 3y^2 - 2xy + 2400x + 1920y,$$

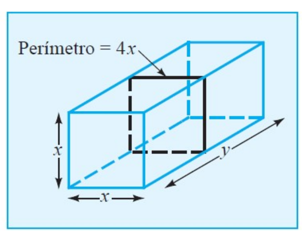
donde x denota el número completo de unidades ensambladas y y el número de kits fabricados y vendidos cada semana. El total del costo semanal atribuible a la fabricación de estos altavoces es

$$C(x, y) = 1440x + 1120y + 40000, \quad \text{(en dólares)}$$

en donde x y y tienen el mismo significado como antes. Determine las unidades ensambladas y los kits que debería fabricar Acrosonic por semana para maximizar sus utilidades.

---

3. **[15 pts]** De acuerdo con el reglamento postal, el perímetro más la longitud de un paquete enviado por correo de cuarta clase no pueden exceder de 108 pulgadas. ¿Cuál es el máximo volumen posible de un paquete rectangular con dos lados cuadrados que se puedan enviar por correo de cuarta clase? (Consulte la siguiente figura).



---

4. **[15 pts]** Un fabricante tiene $8000 para gastar en el desarrollo y promoción de un nuevo producto. Se estima que si x miles de dólares se gastan en el desarrollo y y miles de dólares se gastan en promoción, las ventas serán aproximadamente de $f(x, y) = 50x^{1/2}y^{3/2}$ unidades. ¿Cuánto dinero debe asignar el fabricante a desarrollo y cuánto a promoción para maximizar ventas?

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución de la fila A

1) $z = x^2 + xy^3$; $x = uv^2 + w^3 \wedge y = u + ve^w$

Cuando $u=2$, $v=1$ y $w=0$, tenemos

$x = 2 \wedge y = 3$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

- $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^3$ • $\frac{\partial x}{\partial u} = v^2$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2$ • $\frac{\partial y}{\partial u} = 1$

Para los valores anteriores de las variables, tenemos

- $\frac{\partial z}{\partial x} = 31$ • $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = 54$ • $\frac{\partial y}{\partial u} = 1$.

Luego,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 31\cdot 1 + 54\cdot 1 = 85.$$

2) Sea U la función utilidad de Acrosonic, entonces

$$U = \text{ingresos} - \text{costos} = I - C$$
$$= -2x^2 - 3y^2 - 2xy + 2400x + 1920y - 1440x - 1120y - 40000.$$

Entonces,

$$U(x,y) = -2x^2 - 3y^2 - 2xy + 960x + 800y - 40000$$

Esta función alcanza su máximo cuando $x = 208 \wedge y = 64$.

3) Restricción: $4x + y = 108$;

función: $f(x,y) = x^2y$; $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Consideremos la función

$$F(x,y,\lambda) := x^2y - \lambda(4x + y - 108).$$

Ahora,

$F_x = 2xy - 4\lambda$ $F_y = x^2 - \lambda$

$F_\lambda = -(4x + y - 108)$.

La solución del sistema

$$\begin{cases} 2xy - 4\lambda = 0 \\ x^2 - \lambda = 0 \\ -4x - y + 108 = 0 \end{cases}$$

es $x = 18$, $y = 36 \wedge \lambda = 324$. Entonces, el máximo volumen posible es

$$f(18,36) = (18)^2\cdot 36 = 11664.$$

4) Restricción: $x + y = 8$

función: $f(x,y) = 50x^{1/2}y^{3/2}$

Consideremos la función

$$F(x,y,\lambda) := 50x^{1/2}y^{3/2} - \lambda(x + y - 8).$$

Ahora bien,

$F_x = 25x^{-1/2}y^{3/2} - \lambda$ $F_y = 75x^{1/2}y^{1/2} - \lambda$

$F_\lambda = -(x + y - 8)$

Una solución del sistema

$$\begin{cases} 25x^{-1/2}y^{3/2} - \lambda = 0 \\ 75x^{1/2}y^{1/2} - \lambda = 0 \\ -x - y + 8 = 0 \end{cases}$$

es $x = 2$, $y = 6 \wedge \lambda = 150\sqrt{3}$. El fabricante maximiza las ventas cuando

$x = 2 \wedge y = 6$.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 202230
Fila B
Septiembre 24 de 2022

Nombre completo:____________________ Código:____________________

Realice sólo tres puntos. Los ejercicios 1 y 2 son obligatorios.

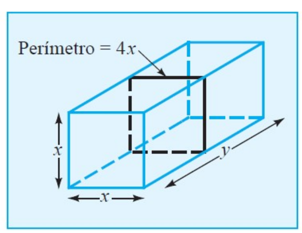
1. [**15 pts**] Determine la derivada parcial $\partial z/\partial v$ de la función $z = x^3y + y^2$, donde $x = uv^2 + w^3$ y $y = u + ve^w$ cuando $u = 1,\ v = 2$ y $w = 0$.

---

2. [**20 pts**] El total de los ingresos semanales (en dólares) que Acrosonic obtiene al fabricar y vender sus sistemas de estantes con altavoces está dada por
$$I(x,y) = -4x^2 - 3y^2 - 2xy + 5496x + 3863y + 45000,$$
donde x denota el número completo de unidades ensambladas y y el número de kits fabricados y vendidos cada semana. El total del costo semanal atribuible a la fabricación de estos altavoces es
$$C(x,y) = 3832x + 1687y + 15000, \quad \text{(en dólares)}$$
en donde x y y tienen el mismo significado como antes. Determine las unidades ensambladas y los kits que debería fabricar Acrosonic por semana para maximizar sus utilidades.

---

3. [**15 pts**] De acuerdo con el reglamento postal, el perímetro más la longitud de un paquete enviado por correo de cuarta clase no pueden exceder de 150 pulgadas. ¿Cuál es el máximo volumen posible de un paquete rectangular con dos lados cuadrados que se puedan enviar por correo de cuarta clase? (Consulte la siguiente figura).



---

4. [**15 pts**] Un fabricante tiene \$12000 para gastar en el desarrollo y promoción de un nuevo producto. Se estima que si x miles de dólares se gastan en el desarrollo y y miles de dólares se gastan en promoción, las ventas serán aproximadamente de $f(x,y) = 40x^{3/2}y^{1/2}$ unidades. ¿Cuánto dinero debe asignar el fabricante a desarrollo y cuánto a promoción para maximizar ventas?

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución de la fila B

1) $z = x^3y + y^2$; $x = uv^2 + w^3 \wedge y = u + ve^w$

Cuando $u=1$, $v=2$ y $w=0$, tenemos

$$x = 4 \quad \wedge \quad y = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y$ • $\dfrac{\partial x}{\partial v} = 2uv$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2y$ • $\dfrac{\partial y}{\partial v} = e^w$

Para los valores anteriores de las variables, tenemos

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 144$ • $\dfrac{\partial x}{\partial v} = 4$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 70$ • $\dfrac{\partial y}{\partial v} = 1$

Luego,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 144\cdot 4 + 70\cdot 1 = 646.$$

2) Sea U la función utilidad de Acrosonic, entonces

$$U = \text{ingresos} - \text{costos} = I - C$$
$$= -4x^2 - 3y^2 - 2xy + 5496x + 3863y + 45000$$
$$- 3832x - 1687y - 15000.$$

Entonces,

$$U(x,y) = -4x^2 - 3y^2 - 2xy + 1664x + 2176y + 30000.$$

Esta función alcanza su máximo cuando $x = 120 \wedge y = 320$.

3) Restricción: $4x + y = 150$

función: $f(x,y) = x^2y$; $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Consideremos la función

$$F(x,y,\lambda) := x^2y - \lambda(4x + y - 150)$$

Ahora,

$$F_x = 2xy - 4\lambda \qquad F_y = x^2 - \lambda$$
$$F_\lambda = -(4x + y - 150).$$

La solución del sistema

$$\begin{cases} 2xy - 4\lambda = 0 \\ x^2 - \lambda = 0 \\ -4x - y + 150 = 0 \end{cases}$$

es $x = 25$, $y = 50 \wedge \lambda = 625$. Entonces, el máximo volumen posible es

$$f(25,50) = (25)^2\cdot 50 = 31250.$$

4) Restricción $x + y = 12$

función: $f(x,y) = 40x^{3/2}y^{1/2}$.

Consideremos la función

$$F(x,y,\lambda) := 40x^{3/2}y^{1/2} - \lambda(x + y - 12).$$

Ahora bien,

$$F_x = 60x^{1/2}y^{1/2} - \lambda \qquad F_y = 20x^{3/2}y^{-1/2} - \lambda$$
$$F_\lambda = -(x + y - 12).$$

Una solución del sistema

$$\begin{cases} 60x^{1/2}y^{1/2} - \lambda = 0 \\ 20x^{3/2}y^{-1/2} - \lambda = 0 \\ -x - y + 12 = 0 \end{cases}$$

es $x = 9$, $y = 3 \wedge \lambda = 540/\sqrt{3}$. El fabricante maximiza las ventas cuando

$$x = 9 \wedge y = 3$$