SEGUNDO PARCIAL DE CÁLCULO 3 ANEC DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Nombre Completo: ______________________________ Fecha: ____/03/2023 Prof. **Jaider Blanco**

Nota:____

UNIVERSIDAD DEL NORTE

1. **[1 Punto]** Use la regla de la cadena para calcular $\frac{\partial P}{\partial r}$ si $P(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, con $x = re^s, y = se^r,\ z = e^{rs}$, donde $r = 0$ y $s = 2$.
2. **[2 Puntos]** Si x denota la producción de la empresa (en cientos) y y la catidad gastada (en miles de dólares) en los esfuerzos promocionales de vender un producto, entonces la utilidad de la empresa P(en miles de dólares) está dada por $P(x,y) = 16x + 12y + 2xy - x^2 - 2y^2 - 7$.
   a. ¿Qué valores de x y y producirán la utilidad máxima?
   b. ¿Cuál es la utilidad máxima? (Interprete su resultado)
3. **[2 Puntos]** A un editor se le ha asignado $60 000 para gastar en el desarrollo y promoción de un nuevo libro. Se estima que si x miles de dólares se gastan en el desarrollo y y miles en la promoción, se venderían aproximadamente $f(x,y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro.
   a. ¿Cuánto dinero debe asignar el editor al desarrollo y cuanto a la promoción para maximizar las ventas?
   b. ¿Cuáles son las ventas máximas?

Observaciones.

1. La justificación detallada de sus afirmaciones hace parte de la evaluación
2. La duración del examen es de **90 minutos** y está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Esta prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos, **cualquier fraude o intento de fraude** será causal de **anulación** y apertura del correspondiente proceso disciplinario.

Durante la evaluación no hay ningún tipo de pregunta.

Solución:

1. Primero debemos hallar los valores de x, y, z

   $x = 0,\ \ y = 2,\ \ z = 1$

   Segundo debemos hallar las derivadas parciales y ordinarias

$$P_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0$$
$$P_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.89$$
$$P_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.45$$
$$x_r = e^s = e^2 = 7.38$$
$$y_r = se^r = 2$$
$$z_r = se^{rs} = 2$$

   Por lo tanto ,

$$P_r = P_x x_r + P_y y_r + P_z z_r = 0 \times e^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} \times 2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \times 2 = \frac{6}{\sqrt{5}} = 2.68$$

2. Primero hallamos los puntos críticos

$$P_x = 16 + 2y - 2x = 0$$
$$P_y = 2x - 4y + 12 = 0$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} -x + y = -8 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$$

Donde obtenemos

$$-y = -14$$
$$y = 14$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación $-x + y = -8$, obtenemos $-x + 14 = -8$, $-x = -22$, así $x = 22$

Por tanto, el puto critico $(22,14)$.

Ahora utilizaremos el criterio de la segunda derivada para clasificarlo, Hallemos la función discriminante

Para ello, hallamos las derivadas parciales $P_{xx} = -2, P_{yy} = -4$ y $P_{xy} = 2$ de donde obtenemos el valor de $D = P_{xx}P_{yy} - P_{xy}^2 = 8 - 4 = 4 > 0$ y $P_{xx} = -2 < 0$, según el criterio de la segunda derivada el punto $(22,14)$ es un máximo relativo para la función utilidad P.

Por tanto, Si la producción de la empresa es de $x = 2200$ unidades y la cantidad gastada en esfuerzos promocionales de vender un producto es de 14 000 dólares se obtiene una utilidad máxima de 2.53 00.000 dólares.

3. Maximizar la función $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ sujeta a la restricción $g(x, y) = x + y = 60000$

Formemos el sistema de Lagrange

$$\begin{cases} f_x = \gamma g_x \\ f_y = \gamma g_y \\ x + y = 60000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x^{\frac{1}{2}}y = \gamma \\ 20x^{\frac{3}{2}} = \gamma \\ x + y = 60000 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce que

$$30x^{\frac{1}{2}}y = 20x^{3/2}$$
$$y = \frac{20}{30}\frac{x^{3/2}}{x^{1/2}} = \frac{2}{3}x$$
$$y = \frac{2}{3}x$$

Sustituyendo esta expresión en la ultima ecuación

$$x + \frac{2}{3}x = 60\,000$$
$$5x = 180\,000$$
$$x = 36\,000$$

$$y = 24\,000$$

Por lo tanto el punto crítico que maximiza la función demanda es de

$$(36000, 24000)$$

$$f(36,24) = 20(36)^{\frac{3}{2}}(24) = 103.680.000$$

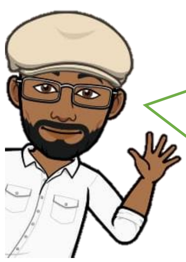
SEGUNDO PARCIAL DE CÁLCULO 3 ANEC DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Nombre Completo: ______________________________ Fecha: ____/03/2023 Prof. **Jaider Blanco**

Nota:____

UNIVERSIDAD DEL NORTE

1. **[1 Punto]** Use la regla de la cadena para calcular $\frac{\partial P}{\partial s}$ si $P(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, con $x=re^s, y=se^r,\ z=e^{rs}$, donde $r=0$ y $s=2$.
2. **[2 Puntos**] El costo total C por serie de producción (en miles de dólares) de cierta industria está dado por $C(x,y)=3x^2+4y^2-5xy+3x-14y+20$, en donde x denota el número de horas-hombre (en cientos) y y el número de unidades (en miles) del producto elaboradas por serie.
   a. ¿Qué valores de x y y darán como resultado el costo total mínimo por serie de producción?
   b. ¿Cuál es el costo total mínimo?
3. **[2 Puntos]** Un fabricante tiene $8000 para gastar en el desarrollo y la promoción de un nuevo producto. Se estima que si x miles de dólares se gastan en el desarrollo y y miles de dólares se gastan en la promoción, las ventas serán de aproximadamente $f(x,y)=50x^{1/2}y^{3/2}$ unidades.
   a. ¿Cuánto dinero debe asignar el fabricante a desarrollo y cuanto a promoción para maximizar las ventas?
   b. ¿Cuáles son las ventas máximas?



Observaciones.

1. La justificación detallada de sus afirmaciones hace parte de la evaluación
2. La duración del examen es de **90 minutos** y está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Esta prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos, **cualquier fraude o intento de fraude** será causal de **anulación** y apertura del correspondiente proceso disciplinario.

Durante la evaluación no hay ningún tipo de pregunta.

Solución:

1. Primero debemos hallar los valores de x,y,z

   $x=0,\ \ y=2,\ \ z=1$

   Segundo debemos hallar las derivadas parciales y ordinarias

$$P_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{0}{\sqrt{5}}=0$$
$$P_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=0.89$$
$$P_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=0.45$$
$$x_s=re^s=0e^2=0$$
$$y_s=e^r=e^0=1$$
$$z_s=re^{rs}=0$$

   Por lo tanto ,

$$P_s=P_xx_s+P_yy_s+P_zz_s=0\times 0+\frac{2}{\sqrt{5}}\times e^0+\frac{1}{\sqrt{5}}\times 0=\frac{2}{\sqrt{5}}=0.89$$

2. $C(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 5xy + 3x - 14y + 20$, es la función de costo
   Primero hallamos los puntos críticos

$$C_x = 6x - 5y + 3 = 0$$
$$C_y = 8y - 5x - 14 = 0$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 6x - 5y = -3 \\ -5x + 8y = 14 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 6 obtenemos,

$$\begin{cases} 30x - 25y = -15 \\ -30x + 48y = 84 \end{cases}$$

Donde obtenemos

$$23y = 69$$
$$y = 3$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación $6x - 5y + 3 = 0$, obtenemos

$$6x - 15 + 3 = 0$$
$$6x = 12$$

,

, así $x = 2$. Por tanto, el puto critico $(2,3)$.

Ahora utilizaremos el criterio de la segunda derivada para clasificarlo, Hallemos la función discriminante

Para ello, hallamos las derivadas parciales $C_{xx} = 6, C_{yy} = 8$ y $C_{xy} = -5$ de donde obtenemos el valor de $D = C_{xx}C_{yy} - C_{xy}^2 = 48 - 25 = 23 > 0$ y $C_{xx} = 6 < 0$, según el criterio de la segunda derivada el punto $(2,3)$ es un mínimo relativo para la función costo C.
Por tanto, Se requieren 200 horas -trabajador y 3000 unidades de producto, para lograr un costo mínimo.

3. Maximizar la función $f(x,y) = 50x^{1/2}y^{3/2}$ sujeta a la restricción $g(x,y) = x + y = 80000$
   Formemos el sistema de Lagrange

$$\begin{cases} f_x = \gamma g_x \\ f_y = \gamma g_y \\ x + y = 60000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25\dfrac{y^{3/2}}{x^{1/2}} = \gamma \\ 75x^{1/2}y^{1/2} = \gamma \\ x + y = 60000 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones se deduce que

$$25\frac{y^{3/2}}{x^{1/2}} = 75x^{1/2}y^{1/2}$$
$$\frac{y^{3/2}}{y^{1/2}} = \frac{75}{25}x^{1/2}x^{1/2} = 3x$$
$$y = 3x$$

Sustituyendo esta expresión en la ultima ecuación

$$x + 3x = 80\,000$$
$$4x = 80\,000$$

$$x = 2000$$

$$y = 6\,000$$

Por lo tanto el punto crítico que maximiza la función demanda es de

$$(2000, 6000)$$

$$f(2{,}6) = 50(2)^{\frac{1}{2}}6^{3/2} = 103.680.000$$