UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III (ANEC) 202310
Fila A
Marzo 25 de 2023

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[9 pts]** Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.
   (a) [4 pts] El punto $(2, 1, 4)$ es un punto crítico de la función $f(x, y, z) = 2x + y + 4z$ . . . . ( )
   (b) [3 pts] Si $w = f(x, y)$, $x = x(r, s, t)$ y $y = y(r, s, t)$, entonces $\partial w/\partial s$ tiene 3 sumandos . . . . . . ( )
   (c) [2 pts] Si (a, b) es un punto crítico de $z = f(x, y)$, entonces $f_x(a, b) = f_y(a, b)$ . . . . ( )

---

2. **[12 pts]** La ecuación de demanda de un producto depende del precio, p_A, de este producto y del precio, p_B, de otro producto a través de la relación

$$q = 30\frac{\sqrt{p_B}}{\sqrt[3]{p_A^2}} \qquad \text{miles de artículos.}$$

Se piensa aumentar los precios de estos dos productos en los próximos meses. El precio de cada artículo dentro de t meses estará dado por: $p_A = 120 + 0,4t + 0,02t^2$ y $p_B = 90 + 0,1t + 0,03t^2$. Determine el ritmo de crecimiento de la demanda dentro de un año.

---

3. **[14 pts]** Una empresa produce dos tipos de auriculares por año: x miles del tipo A e y miles del tipo B. Si las ecuaciones de ingresos y costos para el año son (en millones de dólares)

$$I(x, y) = 2x + 3y,$$
$$C(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 9y + 5,$$

respectivamente. ¿Cuántos de cada tipo de auriculares deben ser producidos por año para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la máxima ganancia?

---

4. **[15 pts]** La función de producción de una empresa es $P(l, k) = 800\sqrt{3l^2 + 1.5k^2}$, en donde l y k representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y P es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de \$250 y cada unidad de capital cuesta \$50 y la empresa dispone de \$6 750 destinados a producción. Determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe emplear para obtener una producción máxima.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

1) (a) $f(x,y,z) = 2x + y + 4z$

$f_x = 2 \quad f_y = 1 \quad f_z = 4$ $\boxed{F}$

$\Rightarrow f$ no tiene puntos críticos

(b) $w = f(x,y)$

$x = x(r,s,t) \quad y = y(r,s,t)$ $\boxed{F}$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

(c) Si (a,b) es un punto crítico de $z = f(x,y)$, entonces $\boxed{V}$

$f_x(a,b) = 0 \wedge f_y(a,b) = 0$

$\Rightarrow f_x(a,b) = f_y(a,b)$

2) $q = 30 P_A^{-2/3} P_B^{1/2}$

$P_A = 120 + 0{,}4t + 0{,}02t^2$

$P_B = 90 + 0{,}1t + 0{,}03t^2$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial P_A} \cdot \frac{dP_A}{dt} + \frac{\partial q}{\partial P_B} \cdot \frac{dP_B}{dt}$$

- $\frac{\partial q}{\partial P_A} = -20 P_A^{-5/3} P_B^{1/2}$ • $\frac{dP_A}{dt} = 0{,}4 + 0{,}04t$

- $\frac{\partial q}{\partial P_B} = 15 P_A^{-2/3} P_B^{-1/2}$ • $\frac{dP_B}{dt} = 0{,}1 + 0{,}06t$

Cuando $t = 12$, tenemos

$P_A = 127{,}68 \wedge P_B = 95{,}52$.

Para los valores anteriores,

- $\frac{\partial q}{\partial P_A} = -0{,}06$ • $\frac{dP_A}{dt} = 0{,}88$

- $\frac{\partial q}{\partial P_B} = 0{,}06$ • $\frac{dP_B}{dt} = 0{,}82$

Entonces,

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=12} \approx -0{,}0036$$

3) Sea G la ganancia de la empresa, entonces

$$G(x,y) = I(x,y) - C(x,y)$$
$$= -x^2 - 2y^2 + 2xy - 4x + 12y - 5.$$

La función G alcanza su máximo cuando $x = 2 \wedge y = 4$.

La máxima ganancia es

$$G(2,4) = 15$$

4) Función a optimizar: $P(l,k) = 800(3l^2 + 1{,}5k^2)^{1/2}$

Restricción: $250l + 50k = 6750 \Leftrightarrow 5l + k = 135$.

Consideramos la función:

$$F(l,k,\lambda) := 800(3l^2 + 1{,}5k^2)^{1/2} - \lambda(5l + k - 135).$$

Derivadas parciales de F:

$$F_l = 400(3l^2 + 1{,}5k^2)^{-1/2} \cdot 6l - \lambda \cdot 5$$

$$F_k = 400(3l^2 + 1{,}5k^2)^{-1/2} \cdot 3k - \lambda \cdot 1$$

$$F_\lambda = -1(5l + k - 135).$$

La solución del sistema

$$\begin{cases} 2400\,l(3l^2 + 1{,}5k^2)^{-1/2} - 5\lambda = 0 \\ 1200\,k(3l^2 + 1{,}5k^2)^{-1/2} - \lambda = 0 \\ -5l - k + 135 = 0 \end{cases}$$

es $k = 10$, $l = 25 \wedge \lambda = 800/3$. La producción de la empresa es máxima cuando $k = 10 \wedge l = 25$.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III (ANEC) 202310
Fila B
Marzo 25 de 2023

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[9 pts]** Conteste falso (F) o verdadero (V) según el caso. Justifique claramente su respuesta.
   (a) [3 pts] Si $w = f(x, y, z)$, $x = x(r, s)$, $y = y(r, s)$ y $z = z(r, s)$, entonces $\frac{\partial w}{\partial r}$ tiene 2 sumandos( )
   (b) [2 pts] Si (a, b) es un punto crítico de $z = f(x, y)$, entonces $f_x(a, b) - f_y(a, b) = 1$ . . . . ( )
   (c) [4 pts] El punto $(-3, 2, 1)$ es un punto crítico de la función $f(x, y, z) = -3x + 2y + z$ . . . . . . ( )

---

2. **[12 pts]** La ecuación de demanda de un producto depende del precio, p_A, de este producto y del precio, p_B, de otro producto a través de la relación

$$q = 20\frac{\sqrt{p_A}}{\sqrt[3]{p_B^2}} \qquad \text{miles de artículos.}$$

Se piensa aumentar los precios de estos dos productos en los próximos meses. El precio de cada artículo dentro de t meses estará dado por: $p_A = 140 + 0,6t + 0,02t^3$ y $p_B = 80 + 0,1t + 0,05t^2$. Determine el ritmo de crecimiento de la demanda dentro de un año.

---

3. **[14 pts]** Una empresa produce dos tipos de auriculares por año: x miles del tipo A e y miles del tipo B. Si las ecuaciones de ingresos y costos para el año son (en millones de dólares)

$$I(x, y) = 4x + 5y,$$
$$C(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - 7y + 5,$$

respectivamente. ¿Cuántos de cada tipo de auriculares deben ser producidos por año para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la máxima ganancia?

---

4. **[15 pts]** La función de producción de una empresa es $P(l, k) = 400\sqrt{5l^2 + 2.5k^2}$, en donde l y k representan el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y P es el número de unidades elaboradas del producto. Cada unidad de mano de obra tiene un costo de \$100 y cada unidad de capital cuesta \$20 y la empresa dispone de \$2 700 destinados a producción. Determine el número de unidades de mano de obra y de capital que la empresa debe emplear para obtener una producción máxima.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

1)

ⓐ $w=f(x,y,z)$ $\boxed{F}$

$x=x(r,s)$, $y=y(r,s)$, $z=z(r,s)$

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

ⓑ Si (a,b) es un punto crítico de $z=f(x,y)$, entonces $\boxed{F}$

$$f_x(a,b)=0 \wedge f_y(a,b)=0$$

$$\Rightarrow f_x(a,b)-f_y(a,b)=0$$

ⓒ $f(x,y,z)=-3x+2y+z$ $\boxed{F}$

$f_x=-3 \quad f_y=2 \quad f_z=1$

$\Rightarrow f$ no tiene puntos críticos

2) $q=20P_A^{1/2}P_B^{-2/3}$

$P_A=140+0{,}6t+0{,}02t^3$

$P_B=80+0{,}1t+0{,}05t^2$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial q}{\partial P_A}\cdot\frac{dP_A}{dt}+\frac{\partial q}{\partial P_B}\cdot\frac{dP_B}{dt}$$

• $\frac{\partial q}{\partial P_A}=10P_A^{-1/2}P_B^{-2/3}$ • $\frac{dP_A}{dt}=0{,}6+0{,}06t^2$

• $\frac{\partial q}{\partial P_B}=-\frac{40}{3}P_A^{1/2}P_B^{-5/3}$ • $\frac{dP_B}{dt}=0{,}1+0{,}1t$

Cuando $t=12$, tenemos

$P_A=181{,}76 \wedge P_B=88{,}4$

Para los valores anteriores,

• $\frac{\partial q}{\partial P_A}=0{,}037$ • $\frac{dP_A}{dt}=9{,}24$

• $\frac{\partial q}{\partial P_B}=-0{,}102$ • $\frac{dP_B}{dt}=1{,}3$

Entonces,

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=12}\approx 0{,}21$$

//

3) Sea G la ganancia de la empresa, entonces

$$G(x,y)=I(x,y)-C(x,y)$$
$$=-x^2-2y^2+2xy+12y-5$$

La función G alcanza su máximo cuando $x=6 \wedge y=6$.

La máxima ganancia es

$$G(6,6)=31.$$

4) Función a optimizar: $P(l,k)=400\sqrt{5l^2+2{,}5k^2}$

Restricción: $100l+20k=2700 \leftrightarrow 5l+k=135$.

Consideremos la función:

$$F(l,k,\lambda):=400(5l^2+2{,}5k^2)^{1/2}-\lambda(5l+k-135)$$

Derivadas parciales de F:

$$F_l=200(5l^2+2{,}5k^2)^{-1/2}\cdot 10l-\lambda\cdot 5$$

$$F_k=200(5l^2+2{,}5k^2)^{-1/2}\cdot 5k-\lambda\cdot 1$$

$$F_\lambda=-1\cdot(5l+k-135)$$

La solución del sistema

$$\begin{cases}2000\,l(5l^2+2{,}5k^2)^{-1/2}-5\lambda=0\\ 1000\,k(5l^2+2{,}5k^2)^{-1/2}-\lambda=0\\ -5l-k+135=0\end{cases}$$

es $k=10$, $l=25 \wedge \lambda\approx 172{,}13$. La producción de la empresa es máxima cuando $k=10 \wedge l=25$.

//