UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 202330
Septiembre 22 de 2023

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[15 pts]** La función de costos conjuntos de dos productos viene dada por

$$C(q_A, q_B) = 0,02(q_A + q_B)^3 - 0,1(q_A + q_B)^2 + 3(q_A + q_B) + 300$$

y las funciones de demandas son

$$q_A = 125 - p_A^2 - 0,1p_B^2,$$
$$q_B = 130 - 0,1p_A^2 - 2p_B^2.$$

Use la Regla de la Cadena para calcular $\frac{\partial C}{\partial p_A}$. Evalúe dicha derivada cuando $p_A = 2$ y $p_B = 3$.

---

2. **[20 pts]** La única tienda de abarrotes en una pequeña comunidad rural vende dos marcas de jugo congelado de manzana: una marca local, que obtiene a un costo de 40 centavos por lata, y una bien conocida marca nacional que obtiene a un costo de 30 centavos por lata. El abarrotero estima que si la marca local se vende a x centavos por lata y la marca nacional a y centavos por lata, entonces todos los días se venderán aproximadamente $80 - 7x + 6y$ latas de la marca local y $70 + 4x - 5y$ latas de la marca nacional.

   (a) [6 pts] Verifique que la función utilidad está dada por

$$U(x, y) = -7x^2 + 240x - 5y^2 - 20y + 10xy - 5\,300.$$

   (b) [14 pts] ¿Qué precio debe aplicar el abarrotero a cada marca para maximizar la utilidad por la venta del jugo?

---

3. **[15 pts]** Para surtir una orden de 200 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$C(q_1, q_2) = 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$$

donde q_1 y q_2 son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solucionario

1) $\frac{\partial C}{\partial P_A} = \frac{\partial C}{\partial q_A}\cdot\frac{\partial q_A}{\partial P_A} + \frac{\partial C}{\partial q_B}\cdot\frac{\partial q_B}{\partial P_A}$

- $\frac{\partial C}{\partial q_A} = 0{,}06\,(q_A+q_B)^2 - 0{,}2\,(q_A+q_B)+3$

- $\frac{\partial C}{\partial q_B} = 0{,}06\cdot(q_A+q_B)^2 - 0{,}2(q_A+q_B)+3$

- $\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -2P_A$ • $\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = -0{,}2\,P_A$

Cuando $P_A = 2$ y $P_B = 3$, tenemos que $q_A = 120{,}1$ y $q_B = 111{,}6$. Para estos valores,

- $\frac{\partial C}{\partial q_A} = 3177{,}75$ • $\frac{\partial C}{\partial q_B} = 3177{,}75$

- $\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -4$ • $\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = -0{,}4$

Luego,

$$\left.\frac{\partial C}{\partial P_A}\right|_{\substack{P_A=2\\P_B=3}} = 3177{,}75(-4) + 3177{,}75(-0{,}4)$$
$$= -13982{,}1$$

2) Sea U la utilidad por la venta del jugo, entonces

ⓐ $U = (x-40)(80-7x+6y)$
$+ (y-30)(70+4x-5y)$.

Por tanto,

$U(x,y) = -7x^2 - 5y^2 + 10xy + 240x - 20y - 5300$ //

ⓑ $U_x = -14x + 10y + 240$

$U_y = -10y + 10x - 20$

La solución del sistema $\begin{cases} U_x = 0 \\ U_y = 0 \end{cases}$ es

$x = 55 \wedge y = 53$

$U_{xx} = -14 \quad U_{yy} = -10 \quad U_{xy} = 10$

Entonces,

$D(55,53) = (-14)(-10) - (10)^2 = 40$.

Como $D(55,53) > 40$ y $U_{xx}(55,53) < 0$, entonces la utilidad es máxima cuando $x = 55$ y $y = 53$. //

3) función a minimizar

$$C(q_1,q_2) = 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$$

Restricción

$$q_1 + q_2 = 200$$

Consideremos la función

$$F(q_1,q_2,\lambda) := 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2 - \lambda(q_1+q_2-200)$$

// Tenemos que

$\frac{\partial F}{\partial q_1} = 6q_1 + q_2 - \lambda$

$\frac{\partial F}{\partial q_2} = q_1 + 4q_2 - \lambda$

$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -q_1 - q_2 + 200$

La solución del sistema

$$\begin{cases} 6q_1 + q_2 - \lambda = 0 \\ q_1 + 4q_2 - \lambda = 0 \\ -q_1 - q_2 + 200 = 0 \end{cases}$$

es $q_1 = 75$, $q_2 = 125$ y $\lambda = 575$. El costo de la empresa es mínimo cuando $q_1 = 75$ y $q_2 = 125$. //