UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III (ANEC) 202530
Septiembre 27 de 2025

Nombre completo:____________________ Código:____________________ Tiempo: 100 min.

1. **[12 pts]** En Colombia, se ha determinado que la distribución del ingreso para distintas profesiones está representada por curvas de Lorenz. Para los administradores de empresas, la curva de Lorenz está dada por $L_1(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x$, mientras que para los profesionales en negocios internacionales está dada por $L_2(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{5}x$. Calcule el índice de Gini para cada profesión. ¿Cuál de las dos profesiones presenta una distribución del ingreso más equitativa?

---

2. **[10 pts]** En el siguiente ejercicio, la primera expresión representa la función de demanda y la segunda corresponde a la función de oferta de un determinado producto. Calcule el excedente de los productores en el punto de equilibrio del mercado.

$$p = 400 - q^2 \qquad \text{y} \qquad p = 20q + 100.$$

---

3. **[9 pts]** A los 30 años, Ana comienza a aportar de manera continua a su cuenta de ahorro para la educación de su hijo, depositando una tasa constante de \$3 000 por año. La cuenta genera intereses a una tasa anual del 4% capitalizada continuamente. Suponiendo que Ana realiza estos aportes como un flujo continuo desde los 30 años hasta los 55 años, ¿cuánto dinero habrá acumulado en su cuenta al cumplir los 55 años?

---

4. **[7 pts]** La utilidad (en dólares) de un negocio está dada por

$$U = 369q - 2.1q^2 - 400,$$

donde q es el número de unidades del producto vendido. Encuentre la utilidad promedio sobre el intervalo de $q = 0$ a $q = 100$.

---

5. **[12 pts]** La función de densidad para una variable aleatoria X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + k & \text{si } \ 2 \le x \le 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre k y $P(X \ge 3)$.

Fórmulas: $IG = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx$; $\quad EP = \displaystyle\int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]dq$; $\quad \bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$;

$$VF = e^{rT}\int_0^T f(t)e^{-rt}dt; \qquad P(X \ge a) = \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Solución

1) IG para administradores de empresas:

$$IG_1 = 2\int_0^1 [x - L_1(x)]\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(x - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{6}x\right) dx = \frac{5}{18} = 0,2\overline{7}$$

IG para profesionales en negocios internacionales

$$IG_2 = 2\int_0^1 [x - L_2(x)]\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left[x - \frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{5}x\right] dx = \frac{3}{10} = 0,3$$

Dado que $IG_1 < IG_2$, entonces el ingreso de los administradores de empresas está más uniformemente distribuido que el ingreso de los profesionales en negocios internacionales.

2) Punto de equilibrio del mercado

$$\begin{cases} p = 400 - q^2 \\ p = 20q + 100 \end{cases} \Rightarrow P_0 = 300 \ \wedge \ q_0 = 10$$

Por consiguiente,

$$EP = \int_0^{10} [300 - 20q - 100]\,dq = 1000$$

3) $r = 0,04$, $T = 25$ y $f(t) = 3000$

Entonces,

$$VF = e^{0,04 \cdot 25}\int_0^{25} 3000\, e^{-0,04t}\,dt$$

$$= 3000\, e \cdot 25\left(1 - 1/e\right)$$

$$\approx 128.871,14$$

4) $$\overline{U} = \frac{1}{100-0}\int_0^{100} (369q - 2,1q^2 - 400)\,dq$$

$$= 11050$$

5) Por ser f una función de densidad, tenemos

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx} + \int_2^4 f(x)\,dx + \cancelto{0}{\int_4^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Entonces,

$$1 = \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x + k\right) dx \Rightarrow k = -1$$

Por tanto,

$$P(X \geq 3) = \int_3^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_3^4 f(x)\,dx + \cancelto{0}{\int_4^{+\infty} f(x)\,dx}$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) dx = \frac{3}{4} = 0,75$$