UNIVERSIDAD DEL NORTE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

M. Sc. Harry Charris Polo

Segundo Parcial De Cálculo 3 ANEC

Observaciones: El examen tiene una duración de 80 minutos. Justifique sus respuestas. Es prohibido el préstamo de cualquier tipo de material, calculadoras, etc. Es prohibido el uso de calculadoras que involucren lenguaje simbólico. El uso y/o posesión del celular durante el examen es causal de anulación.

CUESTIONARIO.

1. Si $w = x^2 + xyz + z^2$ donde

$$x = r^2 - s^2 \qquad y = rs \qquad z = r^2 + s^2$$

determine $\partial w/\partial r$ cuando $r = 1$ y $s = 3$.

2. El costo total C por serie de producción (en miles de dólares) de cierta industria está dada por

$$C(x, y) = 7x^2 + 5y^2 - 9xy - 9x + 5y + 30$$

donde x denota el número horas – hombre (en cientos) y y el número de unidades (en miles) del producto elaboradas por serie. ¿Qué valores de x y y darán como resultado el costo total mínimo por serie de producción?

3. Para surtir una orden de 80 unidades de su producto, una empresa desea distribuir la producción entre sus dos plantas, planta 1 y planta 2. La función de costo total está dada por

$$C(x, y) = 0.4x^2 + 5x + 17y + 1500$$

donde x y y son los números de unidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

SOLUCIÓN.

1. Debemos aplicar la ecuación:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

- $\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + yz$
- $\frac{\partial w}{\partial y} = xz$
- $\frac{\partial w}{\partial z} = xy + 2z$
- $\frac{\partial x}{\partial r} = 2r$
- $\frac{\partial y}{\partial r} = s$
- $\frac{\partial z}{\partial r} = 2r.$

Cuando $r = 1$ y $s = 3$, tenemos que: $x = -8$, $y = 3$ y $z = 10$, por lo tanto:

$\frac{\partial w}{\partial x} = 14$; $\frac{\partial w}{\partial y} = -80$; $\frac{\partial w}{\partial z} = -4$; $\frac{\partial x}{\partial r} = 2$; $\frac{\partial y}{\partial r} = 3$; $\frac{\partial z}{\partial r} = 2.$

Luego,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{\substack{r=1\\ s=3}} = (14)(2) + (-80)(3) + (-4)(2) = -220$$

2. Buscamos $\frac{\partial C}{\partial x}$ y $\frac{\partial C}{\partial y}$

- $\frac{\partial C}{\partial x} = 14x - 9y - 9$
- $\frac{\partial C}{\partial y} = 10y - 9x + 5$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 14x - 9y = 9 & (1) \\ -9x + 10y = -5 & (2) \end{cases}$$

De (1) $y = \frac{14x-9}{9}$ de (2) $y = \frac{9x-5}{10}$

Igualamos:

$$\frac{14x - 9}{9} = \frac{9x - 5}{10}$$

Resolvemos y tenemos que $x = \frac{45}{59}$ y $y = \frac{11}{59}$

$$C_{xx} = 14 \qquad C_{yy} = 10 \qquad C_{xy} = -9$$

Por lo tanto:

$$D = (14)(10) - (-9)^2 = 59$$

Como $D > 0$ y $C_{xx} > 0$, C es mínimo para los valores encontrados de x y y.

3. $F(x, y, \lambda) = 0.4x^2 + 5x + 17y + 1500 - \lambda(x + y - 80)$
   $F_x = 0.8x - 5 - \lambda$
   $F_y = 17 - \lambda$
   $F_\lambda = -(x + y - 80)$

   Resolvemos el sistema:

   $$\begin{cases} 0.8x - 5 - \lambda = 0 \\ 17 - \lambda = 0 \\ -(x + y - 80) = 0 \end{cases}$$

   Obtenemos: $\lambda = 17$ $x = 15$ $y = 65$
   Los costos mínimos son cuando $x = 15$ y $y = 65$.