UNIVERSIDAD DEL NORTE

SEGUNDO PARCIAL DE CALCULO 3 ANEC .A.

PROFESOR: JAIDER E. BLANCO G.

Alumno: ______________________________ código: __________________

Observaciones

1. Duración: 90 Minutos
2. Está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Es prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos.
4. No se puede hablar ni comentar durante la realización del examen.
5. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.
6. Todos los puntos debes de estar debidamente justificados.

1. Un monopolista vende dos productos competitivos, A y B, cuyas ecuaciones demandas son

$$p_A = 35 - 2q_A^2 + q_B$$

Y

$$p_B = 20 - q_B + q_A$$

La función de costos conjuntos es

$$c = -8 - 2q_A^3 + 3q_Aq_B + 30q_A + 12q_B + \frac{1}{2}q_A^2$$

a. ¿Cuántas unidades de A y B tienen que venderse para que el monopolista obtenga una utilidad máxima relativa? Use la prueba de la segunda derivada para justificar su respuesta.
b. Determine los precios de venta requeridos para obtener la utilidad máxima relativa. Encuentre también esta utilidad máxima relativa.

Solución

1. Las funciones de ingresos para los productos A y B están dadas por

$$I_A = p_Aq_A = 35q_A - 2q_A^3 + q_Aq_B$$
$$I_B = p_Bq_B = 20q_B - q_B^2 + q_Aq_B$$

La función ingreso total es

$$I = I_A + I_B = 35q_A - 2q_A^3 + 20q_B - q_B^2 + 2q_Aq_B$$

La función utilidad está dada por

$$U = I - C = 35q_A - 2q_A^3 + 20q_B - q_B^2 + 2q_Aq_B - \left(-8 - 2q_A^3 + 3q_Aq_B + 30q_A + 12q_B + \frac{1}{2}q_A^2\right)$$

$$U(q_A, q_B) = 5q_A + 8q_B - q_Aq_B - q_B^2 - \frac{1}{2}q_A^2$$

Hallamos los puntos críticos para esta función

$$U_{q_A} = 5 - q_B - q_A = 0$$

De aquí se deduce $q_B = 5 - q_A$ (*)

$$U_{q_B} = 8 - q_A - 2q_B = 0 \quad (**)$$

Sustituyendo (*) en (**)

$$8 - q_A - 2(5 - q_A) = 0, \quad q_A = 2, q_B = 3$$

Hallamos

$$D = U_{q_A q_A} U_{q_B q_B} - \left(U_{q_A q_B}\right)^2 = (-1)(-2) - (-1)^2 = 1 > 0$$

Como $D > 0$ y $U_{q_A q_A} < 0$, por el criterio de la segunda derivada, podemos deducir que cuando se venden 2 unidades de A y 3 unidades de B, se obtiene una utilidad máxima para el monopolista de

$U(2,3) = 5(2) + 8(3) - (2)(3) - 3^2 - \frac{1}{2}(2)^2 = 10 + 24 - 6 - 9 - 2 = \$17$ dolares

. Los precios requeridos para obtener utilidad máxima relativa son

$$p_A = 35 - 2q_A^2 + q_B = 35 - 2(4) + 3 = 35 - 8 + 3 = \$30$$

y

$$p_B = 20 - q_B + q_A = 20 - 3 + 2 = \$19$$

2. Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, donde $P(K, L) = 60L^{2/3}K^{1/3}$. Los costos de la mano de obra y del capital son \$64 y \$108 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 2160 unidades de su producto.

   Por medio del método de los multiplicadores de Lagrange halle el número de insumos de mano de obra y de capital tal que deben emplearse con el objetivo de **minimizar el costo total**.

   Solución

   La función de costo es

$$C(K, L) = 64L + 108K$$

   La idea es minimizar esta función utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange sujeta a la restricción

$$g(K, L) = 60L^{2/3}K^{1/3} = 2160$$

Primero hallamos las derivadas parciales

$$C_K = 108, \qquad C_L = 64\ , \quad g_K = 20\frac{L^{2/3}}{K^{2/3}}, \quad g_L = 40\frac{K^{1/3}}{L^{1/3}}$$

Construimos las tres ecuaciones

$$c_K = \gamma g_K, \quad c_L = \gamma g_{L,} \ \ g(K, L) = 60L^{2/3}K^{1/3} = 2160$$

De las dos primeras ecuaciones se deducen

$$\frac{108}{20\frac{L^{2/3}}{K^{2/3}}} = \frac{64}{40\frac{K^{1/3}}{L^{1/3}}}$$

$$\frac{108K}{20} = \frac{64L}{40}$$

$$K = \frac{8}{27}L$$

Sustituyendo en la restricción

$$60L^{2/3}\left(\frac{8}{27}L\right)^{1/3} = 2160$$

$$\frac{2}{3}L = 36$$

$$L = 54, \quad K = \tfrac{8}{27}(54) = 16$$

3. Encuentre la derivada indicada usando la regla de la cadena

$$z = x^2 + 3xy + 7y^3, x = r^2 - 2s, y = 5s^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial r}, \ \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$z_r = z_x x_r + z_y y_r = (2x + 3y)(2r) + (3x + 21y^2)(0) = (2x + 3y)(2r)$$
$$=\big(2(r^2 - 2s) + 3(5s^2)\big)(2r) = (2r^2 - 4s + 15s^2)(2r)$$
$$= 4r^3 - 8rs + 30s^2r.$$

$$z_s = z_x x_s + z_y y_s = (2x + 3y)(-2) + (3x + 21y^2)(10s)$$
$$= (2r^2 - 4s + 15s^2)(-2) + (3r^2 - 6s + 525s^4)(10s) =$$
$$= -4r^2 + 8s - 90s^2 + 30r^2s + 525s^5$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

SEGUNDO PARCIAL DE CALCULO 3 ANEC

PROFESOR: JAIDER E. BLANCO G.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Alumno: ______________________________ código: ____________________

Observaciones

1. Duración: 90 Minutos
2. Está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Es prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos.
4. No se puede hablar ni comentar durante la realización del examen.
5. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.
6. Todos los puntos debes de estar debidamente justificados.

1. Empleando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, con

$$P(L,K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

Le cuesta a la empresa \$100 por cada unidad de mano de obra y \$300 por cada unidad del capital empleado. La empresa dispone de una suma de \$ 45,000 para propósitos de producción. Mediante el método de multiplicadores de Lagrange determine las unidades de mano de obra y de capital que la empresa debería utilizar con el objetivo de **maximizar su producción**.

2. Una empresa produce dos tipos de dulces, A y B, para los cuales los costos promedio de producción son, respectivamente, constantes de \$2 y \$3 por libra. Las cantidades q_A y q_B(en libras) de A y B que pueden venderse cada semana están dadas por las funciones de demanda conjunta

$$q_A = 400(p_B - p_A)$$

Y

$$q_B = 400(9 + p_A - 2p_B)$$

Donde p_A y p_B son los precios de venta (en dólares por libra) de A y B, respectivamente. Determinar los precios de venta que maximizan las utilidades de la compañía, U.

3. Encuentre la derivada indicada usando la regla de la cadena

$$z = (4x+3y)^3, \qquad x = r^2 s, \quad y = r - s\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial s}$$

SOLUCIÓN -Parcial B.

Solución

1. *a*) Aquí la función a maximizar es

$$P(L, K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$$

El costo de emplear L unidades de mano de obra a \$100 cada una y K unidades de capital a \$300 cada una es de $(100L + 300K)$ dólares. Puesto que deseamos disponer por completo de la suma de \$45,000, debemos tener que

$$100L + 300K = 45{,}000$$

Maximizaremos $P(L, K)$ sujeta a esta restricción.

La función auxiliar es

$$F(L, K, \lambda) = 50L^{2/3}K^{1/3} - \lambda(100L + 300K - 45{,}000)$$

Para de obtener un máximo de $P(L, K)$, debe tenerse que

$$F_L = \tfrac{100}{3}L^{-1/3}K^{1/3} - 100\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$F_K = \tfrac{50}{3}L^{2/3}K^{-2/3} - 300\lambda = 0 \qquad (4)$$

$$F_\lambda = -(100L + 300K - 45{,}000) = 0$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones para λ,

$$\lambda = \tfrac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} \qquad \text{y} \qquad \lambda = \tfrac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3} \qquad (5)$$

Ahora igualamos los dos valores de λ.

$$\tfrac{1}{3}L^{-1/3}K^{1/3} = \tfrac{1}{18}L^{2/3}K^{-2/3}$$

Multiplicando ambos lados por $L^{1/3}K^{2/3}$, obtenemos

$$\tfrac{1}{3}K = \tfrac{1}{18}L \qquad \text{o bien,} \qquad L = 6K$$

Sustituyendo esto en la expresión de F_λ resulta que

$$600K + 300K - 45{,}000 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad K = 50$$

Por consiguiente, $L = 6K = 300$ y la empresa maximiza su producción si emplea 300 unidades de mano de obra y 50 de capital.

2.

Solución: la utilidad total está dada por

$$P = \begin{pmatrix} \text{utilidad} \\ \text{por libra} \\ \text{de A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{libras} \\ \text{vendidas} \\ \text{de A} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{utilidad} \\ \text{por libra} \\ \text{de B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{libras} \\ \text{vendidas} \\ \text{de B} \end{pmatrix}.$$

Para A y B, la utilidad por libra es $p_A - 2$ y $p_B - 3$, respectivamente. Así,

$$\begin{aligned} P &= (p_A - 2)q_A + (p_B - 3)q_B \\ &= (p_A - 2)[400(p_B - p_A)] + (p_B - 3)[400(9 + p_A - 2p_B)]. \end{aligned}$$

Note que P está expresada como una función de dos variables, p_A y p_B. Para maximizar P, hacemos sus derivadas parciales iguales a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p_A} &= (p_A - 2)[400(-1)] + [400(p_B - p_A)](1) + (p_B - 3)[400(1)] \\ &= 0 \qquad \text{(regla del producto)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial p_B} &= (p_A - 2)[400(1)] + (p_B - 3)[400(-2)] + 400(9 + p_A - 2p_B)](1) \\ &= 0 \qquad \text{(regla del producto)}. \end{aligned}$$

Al simplificar las dos ecuaciones anteriores resulta

$$\begin{cases} -2p_A + 2p_B - 1 = 0, \\ 2p_A - 4p_B + 13 = 0, \end{cases}$$

cuya solución es $p_A = 5.5$ y $p_B = 6$. Además, encontramos que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_A^2} = -800, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial p_B^2} = -1600, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial p_B \partial p_A} = 800.$$

Por tanto,

$$D(5.5, 6) = (-800)(-1600) - (800)^2 > 0.$$

Como $\partial^2 P/\partial p_A^2 < 0$, tenemos un máximo, y la empresa debería vender el dulce A a \$5.50 por libra y el B a \$6.00 por libra.