Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201910
Fila B
Marzo 23 de 2019

Nombre completo:____________________________Código:____________________________

1. **[10 pts]** Sea $w = 2x + y^2 + z$ donde $x = \dfrac{s}{r}$, $y = 2s$ y $z = \ln r + s^2$. Use la regla de la cadena para verificar que:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} - \frac{2s}{r^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{2}{r} + 10s.$$

---

2. **[20 pts]** La Corporación de cremas dentífricas orgánicas produce crema para dientes en dos tamaños, de 100 y 150 mililitros. El costo de producción de cada tamaño es de 90 y 60 centavos, con precios en centavos de x y y, respectivamente. Las demandas semanales (en miles) para los dos tamaños, 100 y 150 mililitros, son de $320 - 5x + 3y$ y $3(x - y)$, respectivamente.

   (a) [8 pts] Verifique que la utilidad de la compañía está dada por

$$U(x, y) = -5x^2 - 3y^2 + 6xy + 590x - 90y - 28\,800.$$

   (b) [12 pts] Determine los precios x y y que maximizarían las utilidades de la compañía.

---

3. **[20 pts]** Un consumidor tiene \$280 para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta \$5 por unidad y la segunda cuesta \$2 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor por x unidades de la primera mercancía, y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la función de Cobb-Douglas $U(x, y) = 200x^{0.75}y^{0.25}$. ¿Cuántas unidades de cada mercancía debe comprar el consumidor para maximizar la utilidad? (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una utilidad máxima).

Tiempo máximo: 70 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución Parcial II
Cálculo III (ANEC) 201910
fila B

①

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$=2\cdot\frac{-s}{r^2}+2y\cdot 0+1\cdot\frac{1}{r}$$

$$=\frac{-2s}{r^2}+\frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$=2\cdot\frac{1}{r}+2y\cdot 2+1\cdot 2s$$

$$=\frac{2}{r}+8s+2s$$

$$=\frac{2}{r}+10s$$

② a) Sea U la utilidad de la compañía, entonces

$$U(x,y)=(x-90)(320-5x+3y)+(y-60)(3x-3y)$$

$$=320x-5x^2+3xy-28800+450x-270y$$

$$+3xy-3y^2-180x+180y$$

$$=-5x^2-3y^2+6xy+590x-90y-28800$$

b) $U_x=-10x+6y+590$

$U_y=-6y+6x-90$

Resolvamos

$$\begin{cases}-10x+6y+590=0\\ 6x-6y-90=0\end{cases}\quad \text{Sumando}$$

$$-4x \quad +500=0$$

$$x=125$$

Reemplazando en (*), tenemos

$$750-6y-90=0$$

$$-6y+660=0$$

$$y=110$$

U tiene un punto crítico en $(125,110)$.

$U_{xx}=-10 \quad U_{yy}=-6 \quad U_{xy}=6$

$$\Rightarrow D(125,110)=(-10)(-6)-(6)^2=24.$$

Dado que $D(125,110)>0$ y $U_{xx}(125,110)<0$, entonces U es máxima cuando $x=125$ y $y=110$.

③ $U(x,y)=200x^{0,75}y^{0,25}$; $5x+2y=280$.

Consideremos la función

$$F(x,y,\lambda)=200x^{0,75}y^{0,25}-\lambda(5x+2y-280)$$

$$F_x=150x^{-0,25}y^{0,25}-5\lambda$$

$$F_y=50x^{0,75}y^{-0,75}-2\lambda$$

$$F_\lambda=-5x-2y+280$$

Resolvamos el sgte sistema

$$\begin{cases}150x^{-0,25}y^{0,25}=5\lambda & (i)\\ 50x^{0,75}y^{-0,75}=2\lambda & (ii)\\ 5x+2y-280=0 & (iii)\end{cases}$$

(i) ÷ (iii):

$$\frac{150x^{-0,25}y^{0,25}}{50x^{0,75}y^{-0,75}}=\frac{5\lambda}{2\lambda}\Rightarrow\frac{3y}{x}=\frac{5}{2}.$$

$\Rightarrow y=\frac{5}{6}x$. Reemplazamos en (iii), tenemos

$$5x+2\cdot\frac{5}{6}x-280=0.$$

$$\frac{20}{3}x=280$$

$$x=42\Rightarrow y=35.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201910
Fila A
Marzo 23 de 2019

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[10 pts]** Sea $w = x + 2y + z^2$ donde $x = \dfrac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$ y $z = 2r$. Use la regla de la cadena para verificar que:
$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{s} + 12r \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}.$$

---

2. **[20 pts]** La Corporación de cremas dentífricas orgánicas produce crema para dientes en dos tamaños, de 100 y 150 mililitros. El costo de producción de cada tamaño es de 60 y 90 centavos, con precios en centavos de x y y, respectivamente. Las demandas semanales (en miles) para los dos tamaños, 100 y 150 mililitros, son de $3(y - x)$ y $320 + 3x - 5y$, respectivamente.

   (a) [8 pts] Verifique que la utilidad de la compañía está dada por
$$U(x, y) = -3x^2 - 5y^2 + 6xy - 90x + 590y - 28\,800.$$

   (b) [12 pts] Determine los precios x y y que maximizarían las utilidades de la compañía.

---

3. **[20 pts]** Un consumidor tiene \$280 para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta \$2 por unidad y la segunda cuesta \$5 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor por x unidades de la primera mercancía, y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la función de Cobb-Douglas $U(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$. ¿Cuántas unidades de cada mercancía debe comprar el consumidor para maximizar la utilidad? (Puede suponerse que el punto crítico obtenido corresponde a una utilidad máxima).

Tiempo máximo: 70 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución Parcial II

Cálculo III (ANEC) 201910

fila A

① $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$

$= 1\cdot\frac{1}{s} + 2\cdot 2r + 2z\cdot 2$

$= \frac{1}{s} + 4r + 8r$

$= \frac{1}{s} + 12r$

$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$

$= 1\cdot\frac{-r}{s^2} + 2\cdot\frac{1}{s} + 2z\cdot 0$

$= \frac{-r}{s^2} + \frac{2}{s}$

② a) Sea U la utilidad de la compañía, entonces

$U(x,y) = (x-60)\cdot(3y-3x) + (y-90)(320+3x-5y)$

$= 3xy - 3x^2 - 180y + 180x$
$+320y + 3xy - 5y^2 - 28800 - 270x + 450y$

$= -3x^2 - 5y^2 + 6xy - 90x + 590y - 28800.$

b) $U_x = -6x + 6y - 90$

$U_y = -10y + 6x + 590$

Resolvamos

$\begin{cases} -6x+6y-90=0 \\ 6x-10y+590=0 \quad (*) \end{cases}$

Sumando

$-4y + 500 = 0$

$y = 125$

Reemplazando en (*), tenemos

$6x - 1250 + 590 = 0$

$6x - 660 = 0$

$x = 110.$

U tiene un punto crítico en $(110, 125)$.

$U_{xx} = -6 \quad U_{yy} = -10 \quad U_{xy} = 6$

$\Rightarrow D(110,125) = (-6)(-10) - (6)^2 = 24$

Dado que $D(110,125) > 0$ y $U_{xx}(110,125) < 0$, entonces U es máxima cuando $x = 110$ y $y = 125$.

③ $U(x,y) = 100x^{0{,}25}y^{0{,}75}$; $2x+5y=280$

Consideramos la función

$F(x,y,\lambda) = 100x^{0{,}25}y^{0{,}75} - \lambda(2x+5y-280)$

$F_x = 25x^{-0{,}75}y^{0{,}75} - 2\lambda$

$F_y = 75x^{0{,}25}y^{-0{,}25} - 5\lambda$

$F_\lambda = -2x - 5y + 280.$

Resolvamos el sgte sistema

$\begin{cases} 25x^{-0{,}75}y^{0{,}75} = 2\lambda & (i) \\ 75x^{0{,}25}y^{-0{,}25} = 5\lambda & (ii) \\ 2x+5y-280 = 0 & (iii) \end{cases}$

$(i) \div (ii)$:

$\frac{25x^{-0{,}75}y^{0{,}75}}{75x^{0{,}25}y^{-0{,}25}} = \frac{2\lambda}{5\lambda} \Rightarrow \frac{y}{3x} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow y = \frac{6}{5}x$. Reemplazamos en (iii), tenemos

$2x + 5\cdot\frac{6}{5}x - 280 = 0.$

$8x = 280$

$x = 35 \Rightarrow y = 42.$