Segundo Parcial de Cálculo III

$Profesor : JTilano$
UNIVERSIDAD DEL NORTE
Duración: 90 minutos

Resolver un único punto entre 4.1 y 4.2.
En total debe resolver 5 puntos.
1) Dada la función escalar $Z = e^{x+y}$, obtener $\frac{\partial z}{\partial t}$ si $x = t^2 + 3$ e $y = \sqrt{t^5}$.
2) Encuentre los puntos críticos de la función de dos variables
$f(x, y) = x^3 + 3yx - 3y^3$, y establezca los valores extremos de la función dada.

3) Dentro del enfoque tradicional, interesa maximizar la producción en función de las variables recurso laboral l y capital insumo k. Suponga que $f(l, k) = 8.2l^2 - 0.09l^3 + 5.7k^2 - 0,06k^3$ determine los valores extremos de la función.

4.1) Encuentre los puntos críticos para $f(x, y) = 22x^2 - 5y + 15$ donde los puntos críticos pertenecen a una elipse con eje mayor 8 sobre el eje x y eje menor 6.

4.2) Diga si es falso o verdadero, en cada caso el considerar que las siguientes son funciones de costo.
a) $C(Q) = 3Q^2 - 2Q + 4$
b) $C(Q) = 5Q^2 - 12Q + 6$
a) $C(Q) = 3Q^2 - 2Q + 1/4$
b) $C(Q) = 5Q^2 - 12Q - 6$
a) $C(Q) = 3Q^2 - 4Q - 1$
5. Dada la función de productividad, de rendimiento creciente de escala
$P(x, y) = (xy)^{1.4}$, sujeta a $5000 = 250x + 300y$.
Encuentre los puntos críticos y maximice la producción. Luego interprete sus soluciones.

Solución Segundo Parcial de Cálculo III

$Profesor: JTilano$
UNIVERSIDAD DEL NORTE
Duración: 90 minutos

Seleccionar uno entre 4.1 y 4.2 para realizar.
En total debe resolver 5 puntos.

1) Dada la función escalar $Z = e^{x+y}$, obtener $\frac{\partial z}{\partial t}$ si $x = t^2 + 3$ e $y = \sqrt{t^5}$.
Solución
Utilizando laa regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{x+y}2t + e^{x+y}\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}$$

Finalmente, factorizando se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{x+y}\left(2t + \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}\right)$$

2) Encuentre los puntos críticos de la función de dos variables
$f(x,y) = x^3 + 3yx - 3y^3$, y establezca los valores extremos de la función dada.
Solución
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -9y^2 + 3x$
Igualando a cero las derivadas parciales de primer orden, se obtienen los puntos críticos $P(0,0)$ y $Q\left(3^{-\frac{1}{3}}, -9^{-\frac{1}{3}}\right)$
$f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = -18y$ y $f_{xy} = 3$.
Al definir $D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$, se encuentra que $D(0,0) = -9$ origina un punto de silla según criterio de la segunda derivada. Por su parte, en el punto Q se origina $D\left(3^{-\frac{1}{3}}, -9^{-\frac{1}{3}}\right) = 27$ origina un valor extremo mínimo, dado que $f_{xx} > 0$, por criterio de la segunda derivada. El valor mínimo local de f en Q es -0.333.
3) Dentro del enfoque tradicional, interesa maximizar la producción en función de las variables recurso laboral l y capital insumo k. Suponga que $f(l,k) = 8.2l^2 - 0.09l^3 + 5.7k^2 - 0,06k^3$ determine los valores extremos de la función.
Solución
Primero, se obtienen las derivadas parciales de primer orden
$\frac{\partial f}{\partial l} = 16,4l - 0,27l^2$ y $\frac{\partial f}{\partial k} = 11,4k - 0,18k^2$.
Al igualar a cero, se obtienen los puntos críticos $l = 0$, $l = 60.74$, $k = 0$ y $k = 63.33$.
Ahora bien, $f_{ll} = 16,4 - 0,54l$; $f_{kk} = 11,4 - 0,36k$; $f_{lk} = 0$.

Se tiene $D(l,k) = f_{ll} * f_{kk} - f_{lk}^2$. Esto es, $D(l,k) = (16,4 - 0,54l)(11,4 - 0,36k)$
Los puntos críticos son $p_1(0,0)$, $p_2(60.74,0)$, $p_3(0,63.33)$ y $p_4(60.74,63.33)$.
Para p_1 se tiene $D(0,0) = 16.4 * 11.4$, es decir, $D(0,0) > 0$, y $f_{ll}(0,0) = 16.4$, es decir $f_{ll}(0,0) > 0$; indicando que en $p_1(0,0)$ hay un mínimo local o relativo, donde la productividad es igual a cero.
Para p_2 se tiene $D(60.74,0) = (16.4 - 60.74 * 0.54) * 11.4$, es decir, $D(60.74,0) < 0$, es decir en $p_2(60.74,0)$ hay un punto de silla.
Para p_3 se tiene $D(0,63.33) = 16.4 * (11.4 - 0.36 * 63.33)$, es decir, $D(0,63.33) < 0$, es decir en $p_3(0,63.33)$ hay un punto de silla.
Para p_4 se tiene $D(60.74,63.33) > 0$ y $f_{ll}(60.74,63.33) = 16.4 - 60.74 * 0,54$, esto es, $f_{ll}(60.74,63.33) < 0$ ocurre un máximo local o relativo. El resultado de la función es 17705.57.
4.1) Encuentre los puntos críticos para $f(x,y) = 22x^2 - 5y + 15$ donde los puntos críticos pertenecen a una elipse con eje mayor 8 sobre el eje x y eje menor 6.
Solución
La relación elíptica se define como $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, esto es, $9x^2 + 16y^2 = 144$.
Se define la función a optimizar como
$L(x,y) = 22x^2 - 5y + 15 - \lambda\left(9x^2 + 16y^2 - 144\right)$
En principio, calculamos las derivadas parciales de primer orden
$\frac{\partial f}{\partial x} = 44x - 18\lambda x$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -5 - 32\lambda y$
$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 144 - 9x^2 - 16y^2$
Despejando despues de igualar a cero, se tiene
$y = \frac{-5}{32\lambda}$
$x = +/- \frac{\sqrt{144-16y^2}}{3}$
$\lambda = \frac{22}{9}$, si $x \neq 0$
$\lambda = +/- \frac{5}{96}$, si $x = 0$
$y = -\frac{45}{704}$, para este $x = +/- \frac{4\sqrt{689*719}}{704}$.
Los puntos críticos (x,y) son $\left(\frac{-4\sqrt{689*719}}{704}, -\frac{45}{704}\right)$, $\left(\frac{4\sqrt{689*719}}{704}, -\frac{45}{704}\right)$, $(0,-3)$ y $(0,3)$.

4.2) Diga si es falso o verdadero, en cada caso el considerar que las siguientes son funciones de costo.
a) $C(Q) = 3Q^2 - 2Q + 4$
b) $C(Q) = 5Q^2 - 12Q + 6$
a) $C(Q) = 3Q^2 - 2Q + 1/4$
b) $C(Q) = 5Q^2 - 12Q - 6$
a) $C(Q) = 3Q^2 - 4Q - 1$
Solución
Todas son falsas porque los costos marginales fijos son negativos, y se requiere que sean positivos.
5. Dada la función de productividad, de rendimiento creciente de escala
$P(x,y) = (xy)^{1.4}$, sujeta a $5000 = 250x + 300y$.
Encuentre los puntos críticos y maximice la producción. Luego interprete sus soluciones. Solución Al reemplazar la restricción, despejando y,, queda una función cuadrática cóncava en la base; que al tomar logaritmo da para un máximo en el vértice $V\left(\frac{5000}{2(250)}, \frac{5000}{2(300)}\right) = (10, 25/3)$.
En este la producción es máxima igual a $\left(\frac{250}{3}\right)^{1.4}$.