Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201930
Fila A
Septiembre 23 de 2019

Nombre completo:____________________________Código:____________________________

1. **[10 pts]** En una farmacia se manejan dos tipos de agua vitaminada: la marca A y la marca B. Las cifras de ventas indican que si la marca A se vende por x dólares por botella y la marca B por y dólares, la demanda de la marca A será
$$Q(x,y) = 300 - 20x^2 + 30y$$
botellas mensuales. Se estima que dentro de t meses, el precio de la marca A será $x = 2 + 0.05t$ dólares por botella y el precio de la marca B será $y = 2 + 0.1\sqrt{t}$ dólares por botella. ¿A qué razón se debe esperar que cambie la demanda de la marca A dentro de 4 meses?

---

2. **[20 pts]** Una tienda vende dos marcas de playeras competidoras, una de ellas apoyada por Kevin Durant y la otra por LeBron James. El propietario de la tienda puede obtener ambos tipos a un costo de \$2 por playera y estima que si las de Durant se venden en x dólares por pieza, y las de James en y dólares por pieza, los consumidores comprarán aproximadamente $40 - 50x + 40y$ playeras Durant y $20 + 60x - 70y$ playeras James, todos los días.

   (a) [8 pts] Muestre que la utilidad de la tienda está dada por
$$U(x,y) = -50x^2 - 70y^2 + 100xy + 20x + 80y - 120.$$

   (b) [12 pts] ¿A qué precio debe vender el propietario las playeras para generar la máxima utilidad posible?

---

3. **[20 pts]** Un fabricante tiene \$600 000 para gastar en la producción de cierto producto y determina que si k unidades de capital y l unidades de fuerza laboral se asignan a la producción, entonces P unidades se producirán, donde P está dada por la función de producción
$$P(k,l) = 120k^{4/5}l^{1/5}.$$
Suponga que cada unidad de fuerza laboral cuesta \$3 000 y cada unidad de capital cuesta \$5 000. ¿Cuántas unidades de fuerza laboral y capital deben asignarse para maximizar la producción?

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Parcial A

① $Q(x,y) = 300 - 20x^2 + 30y$

$x = 2 + 0{,}05t$
$y = 2 + 0{,}1\sqrt{t}$; $t = 4$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= -40x \cdot 0{,}05 + 30 \cdot \frac{0{,}1}{2\sqrt{t}}$$

Si $t = 4$, tenemos $x = 11/5$.

Luego,

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=4} = -40\cdot\frac{11}{5}\cdot 0{,}05 + 30\cdot\frac{0{,}1}{2\sqrt{4}}$$

$$= \frac{-73}{20} = -3{,}65$$

② Utilidad = ingresos − costos

entonces

a) $U(x,y) = (x-2)(40-50x+40y)$

$+ (y-2)(20+60x-70y)$

$= 40x - 50x^2 + 40xy - 80 + 100x - 80y$

$+ 20y + 60xy - 70y^2 - 40 - 120x + 140y$

$= -50x^2 - 70y^2 + 100xy + 20x + 80y - 120$

b) $U_x = -100x + 100y + 20$

$U_y = -140y + 100x + 80$

Resolvamos

$$\begin{cases} -100x + 100y = -20 \\ 100x - 140y = -80 \quad (*) \end{cases}$$

$$-40y = -100$$
$$y = 5/2$$

Reemplazando en $(*)$:

$100x = -80 + 140 \cdot 5/2$

$\Rightarrow x = 27/10$

$U_{xx} = -100 \quad U_{yy} = -140 \quad U_{xy} = 100$

Entonces,

$$D\left(\frac{27}{10}, \frac{5}{2}\right) = (-100)(-140) - (100)^2 = 4000$$

Como $D(27/10, 5/2) > 0 \wedge U_{xx} < 0$, entonces

la utilidad es máxima cuando el precio de playera Durant es \$2,7 y el precio de playera James es \$2,5.

③ $P(k,l) = 120k^{4/5}l^{1/5}$

$3000l + 5000k = 600\,000$ ó $3l + 5k = 600$

Consideremos la función

$$F(k,l,\lambda) = 120k^{4/5}l^{1/5} - \lambda(3l + 5k - 600)$$

Punto crítico de F:

$$\begin{cases} F_k = 0 \\ F_l = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 96k^{-1/5}l^{1/5} - 5\lambda = 0 \\ 24k^{4/5}l^{-4/5} - 3\lambda = 0 \\ -(3l + 5k - 600) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 96k^{-1/5}l^{1/5} = 5\lambda & (i) \\ 24k^{4/5}l^{-4/5} = 3\lambda & (ii) \\ -3l - 5k + 600 = 0. & (iii) \end{cases}$$

$(i) \div (ii)$: $\frac{4l}{k} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3l = \frac{5}{4}k \quad (iv)$

Reemplazando (iv) en (iii), obtenemos

$$-\frac{5}{4}k - 5k + 600 = 0$$

$$-\frac{25}{4}k = -600 \Rightarrow k = 96 \Rightarrow l = 40.$$

Ahora bien,

$P(96,40) = 120(96)^{4/5}(40)^{1/5} \approx 9669{,}63$

$P(0,200) = 0.$

La producción es máxima cuando hay 96 unidades de capital y 40 unidades de fuerza laboral.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Segundo parcial de Cálculo III ANEC 201930
Fila B
Septiembre 23 de 2019

Nombre completo:______________________ Código:______________________

1. **[10 pts]** En una farmacia se manejan dos tipos de agua vitaminada: la marca A y la marca B. Las cifras de ventas indican que si la marca A se vende por x dólares por botella y la marca B por y dólares, la demanda de la marca B será
$$Q(x, y) = 500 + 20x - 30y^2$$
botellas mensuales. Se estima que dentro de t meses, el precio de la marca A será $x = 2+0.05\sqrt{t}$ dólares por botella y el precio de la marca B será $y = 2 + 0.1t$ dólares por botella. ¿A qué razón se debe esperar que cambie la demanda de la marca B dentro de 9 meses?

---

2. **[20 pts]** Una tienda vende dos marcas de camisas competidoras, una de ellas apoyada por Cristiano Ronaldo y la otra por Lionel Messi. El propietario de la tienda puede obtener ambos tipos a un costo de \$3 por camisa y estima que si las de Ronaldo se venden en x dólares por pieza, y las de Messi en y dólares por pieza, los consumidores comprarán aproximadamente $60 - 50x + 80y$ camisas Ronaldo y $60 + 40x - 90y$ camisas Messi, todos los días.
   (a) [8 pts] Muestre que la utilidad de la tienda está dada por
   $$U(x, y) = -50x^2 - 90y^2 + 120xy + 90x + 90y - 360.$$
   (b) [12 pts] ¿A qué precio debe vender el propietario las camisas para generar la máxima utilidad posible?

---

3. **[20 pts]** Un fabricante tiene \$800 000 para gastar en la producción de cierto producto y determina que si k unidades de capital y l unidades de fuerza laboral se asignan a la producción, entonces P unidades se producirán, donde P está dada por la función de producción
$$P(k, l) = 80k^{3/4}l^{1/4}.$$
Suponga que cada unidad de fuerza laboral cuesta \$5 000 y cada unidad de capital cuesta \$4 000. ¿Cuántas unidades de fuerza laboral y capital deben asignarse para maximizar la producción?

Tiempo máximo: 80 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Parcial B

① $Q(x,y) = 500 + 20x - 30y^2$

$x = 2 + 0{,}05\sqrt{t}$

$y = 2 + 0{,}1t$; $t = 9$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= 20\cdot\frac{0{,}05}{2\sqrt{t}} + (-60y)\cdot 0{,}1$$

Si $t=9$, tenemos $y = 29/10$

luego,

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=9} = 20\cdot\frac{0{,}05}{2\sqrt{9}} + \left(-60\cdot\frac{29}{10}\right)\cdot 0{,}1$$

$$= -\frac{517}{30} \approx -17{,}23$$

② Utilidad = ingresos − costos

entonces

a) $U(x,y) = (x-3)(60-50x+80y)$
$+(y-3)(60+40x-90y)$

$= 60x - 50x^2 + 80xy - 180 + 150x - 240y$
$+ 60y + 40xy - 90y^2 - 180 - 120x + 270y$

$= -50x^2 - 90y^2 + 120xy + 90x + 90y - 360$

b) $U_x = -100x + 120y + 90$

$U_y = -180y + 120x + 90$

Resolvamos

$$\begin{cases} -10x + 12y = -9 \\ 4x - 6y = -3 \end{cases}$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} -10x + 12y = -9 \\ 8x - 12y = -6 \end{cases}$$

$-2x \quad = -15$

$\Rightarrow x = 15/2 \wedge y = 11/2$

$U_{xx} = -100 \quad U_{yy} = -180 \quad U_{xy} = 120$

Entonces,

$D\left(\frac{15}{2}, \frac{11}{2}\right) = (-100)(-180) - (120)^2 = 3600$

Como $D(15/2, 11/2) > 0 \wedge U_{xx} < 0$, entonces la utilidad es máxima cuando el precio de la camisa Ronaldo es \$7,5 y el precio de la camisa Messi es \$5,5.

③ $P(k,l) = 80k^{3/4}l^{1/4}$

$5000l + 4000k = 800000$ ó $5l + 4k = 800$

Consideremos la función

$F(k,l,\lambda) = 80k^{3/4}l^{1/4} - \lambda(5l + 4k - 800)$

Punto crítico de F:

$$\begin{cases} F_k = 0 \\ F_l = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60k^{-1/4}l^{1/4} - 4\lambda = 0 \\ 20k^{3/4}l^{-3/4} - 5\lambda = 0 \\ -(5l + 4k - 800) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60k^{-1/4}l^{1/4} = 4\lambda & \text{(i)} \\ 20k^{3/4}l^{-3/4} = 5\lambda & \text{(ii)} \\ -5l - 4k + 800 = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

(i) ÷ (ii): $\frac{3l}{k} = \frac{4}{5} \Rightarrow 15l = 4k$ (iv)

Reemplazando (iv) en (iii), obtenemos

$-5l - 15l + 800 = 0$

$-20l = -800$

$l = 40 \Rightarrow k = 150$

Ahora bien,

$P(150, 40) = 80(150)^{3/4}(40)^{1/4} \approx 8623{,}3$

$P(0, 160) = 0.$

Luego, la producción es máxima cuando $k = 150 \wedge l = 40$.