UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Parcial 3 de Cálculo 3 ANEC
12 de mayo de 2022

Nombres y Apellidos: ____________________ Código: ____________ **Fila A**

Instrucciones. Desarrollar cada ejercicio de forma clara y ordenada. **Se prohíbe** el uso de calculadoras, celulares u otros dispositivos electrónicos durante el desarrollo del examen. **(Infringir cualquiera de estas normas es causal de anulación del examen.)**

1. Use desigualdades para describir R en términos de sus secciones transversales verticales y horizontales.

$$R \text{ es el triángulo con vértices } (1,0), (3,3) \text{ y } (4,1).$$

---

2. Evalúe la integral doble dada, para la región R indicada.

$$\iint_R 3xy^2\, dA, \quad \text{donde } R \text{ es el rectángulo limitada por } x=-1, x=2, y=-1 \text{ y } y=0.$$

---

3. Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{2} f(x,y)\, dydx.$$

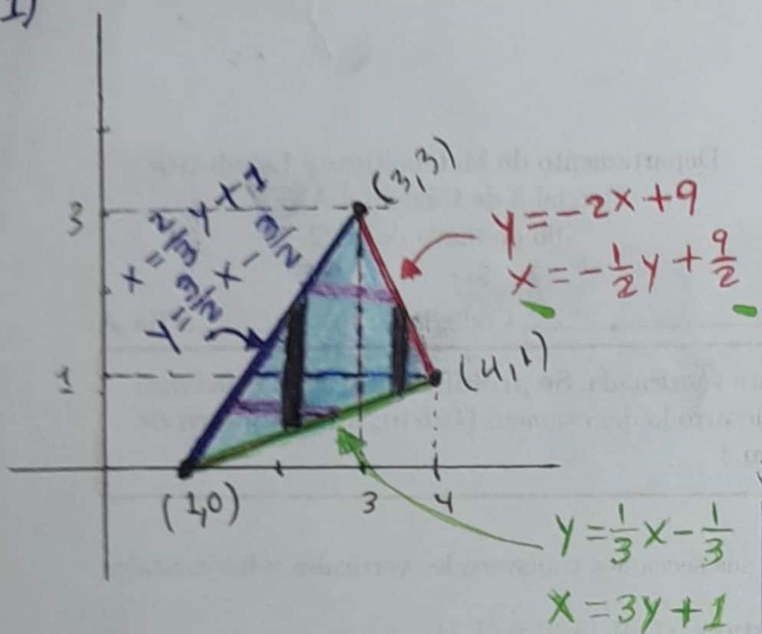
---

4. Encuentre el valor promedio de la función $f(x,y)=x$ sobre la región R dada por: R es la región limitada por $y=4-x^2$ y $y=0$.

Recuerde:

- **Área de la región R:** $a(R)=\iint_R 1\, dA$
- **Valor promedio:** $VP=\dfrac{1}{a(R)}\iint_R f(x,y)\, dA$

1)



• Sección transversal vertical (Tipo I)

$$R=\begin{cases}1\le x\le 3\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\le y\le \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\end{cases}+\begin{cases}3\le x\le 4\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\le y\le -2x+9\end{cases}$$

• Sección transversal horizontal (Tipo II)

$$R=\begin{cases}0\le y\le 1\\ \frac{2}{3}y+1\le x\le 3y+1\end{cases}+\begin{cases}1\le y\le 3\\ \frac{2}{3}y+1\le x\le -\frac{1}{2}y+\frac{9}{2}\end{cases}$$

2) $R=[-1,2]\times[-1,0]$

$$\iint_R 3xy^2\,dA=\left(\int_{-1}^{2}3x\,dx\right)\left(\int_{-1}^{0}y^2\,dy\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}\right)\left(\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{0}\right)$$

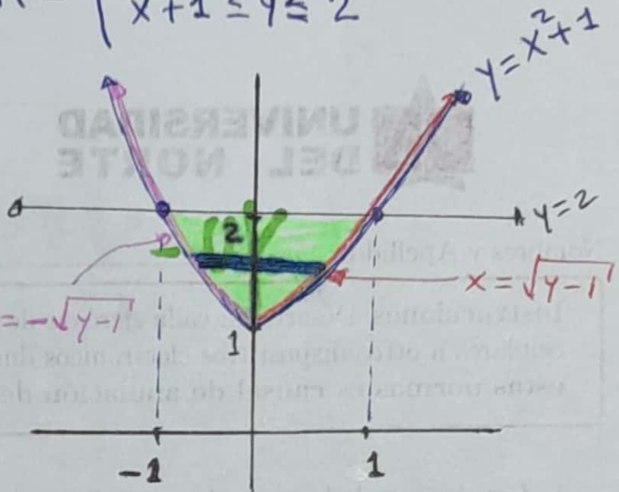
$$=\left(6-\frac{3}{2}\right)\left(0+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

Luego:

$$\boxed{\iint_R 3xy^2\,dA=\frac{3}{2}}$$

3) $R=\begin{cases}-1\le x\le 1\\ x^2+1\le y\le 2\end{cases}$ (Tipo I)

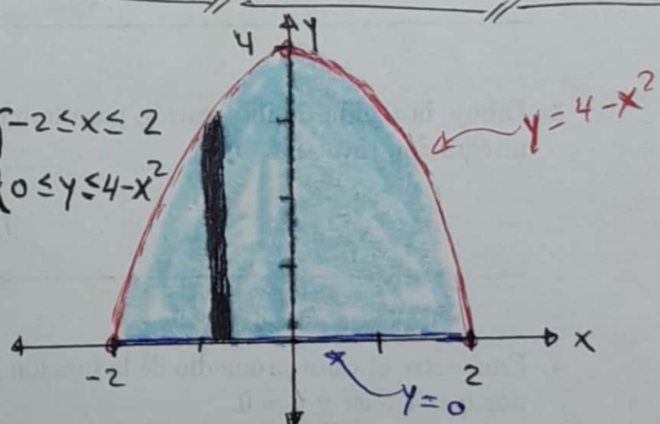


$$R=\begin{cases}1\le y\le 2\\ -\sqrt{y-1}\le x\le \sqrt{y-1}\end{cases}\quad (\text{Tipo II})$$

luego

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\int_{x^2+1}^{2}f(x,y)\,dy\,dx=\int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}f(x,y)\,dx\,dy}$$

4)



$$R=\begin{cases}-2\le x\le 2\\ 0\le y\le 4-x^2\end{cases}$$

$$a=\iint_R dA=\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}dy\,dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\left(4x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$=\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}=16-\frac{16}{3}$$

$$=16\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{3}\longrightarrow \boxed{a(R)=\frac{32}{3}u^2}$$

$$V_p=\frac{1}{a(R)}\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}(x)\,dy\,dx=\frac{3}{32}\int_{-2}^{2}x\,y\Big|_{0}^{4-x^2}dx$$

$$=\frac{3}{32}\int_{-2}^{2}x(4-x^2)\,dx=\frac{3}{32}\int_{-2}^{2}(4x-x^3)\,dx$$

$$=\frac{3}{32}\left(2x^2-\frac{1}{4}x^4\right)_{-2}^{2}=\frac{3}{32}\left[(8-4)-(8-4)\right]$$

$$=\frac{3}{32}(4-4)\longrightarrow \boxed{V_p=0}$$