UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202210
Fila A
Mayo 7 de 2022

Nombre completo:______________________________ Código:______________________________

1. **[6 pts]** Evalúe la integral dada a continuación.

$$\int_0^2 \int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dxdy.$$

---

2. **[7 pts]** Dibuje la región R de integración y cambie el orden de integración.

$$\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx.$$

---

3. **[15 pts]** Considere la integral

$$\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1-x^2}dxdy.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.

   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.

   (c) [5 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. **[10 pts]** Use una integral doble para calcular el área de la región R acotada por el par de parábolas $y = 4 - x^2$ y $y = x^2 - 4$.

---

5. **[12 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y) = 2x\sqrt{1+y^3}$$

sobre la región $R : 0 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq y$. Escoja cuidadosamente el orden de integración.

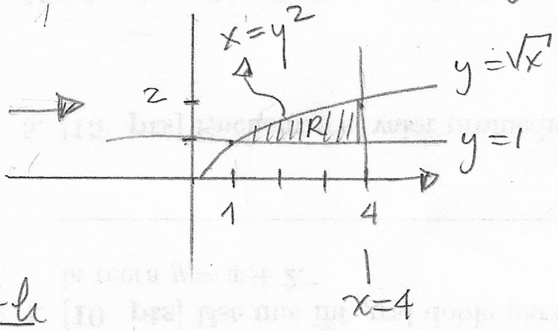
Tiempo máximo: 110 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución fila A

1) $\int_0^2\int_0^2 (16-x^2-2y^2)\,dx\,dy = 48$

2) stv de R: $1 \le x \le 4 \wedge 1 \le y \le \sqrt{x}$

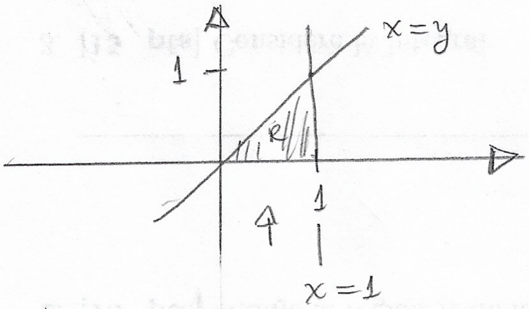


sth

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le 2 \wedge y^2 \le x \le 4\}$

$\Rightarrow \int_1^4\int_1^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_1^2\int_{y^2}^4 f(x,y)\,dx\,dy$

3) ⓐ sth: $0 \le y \le 1 \wedge y \le x \le 1$.



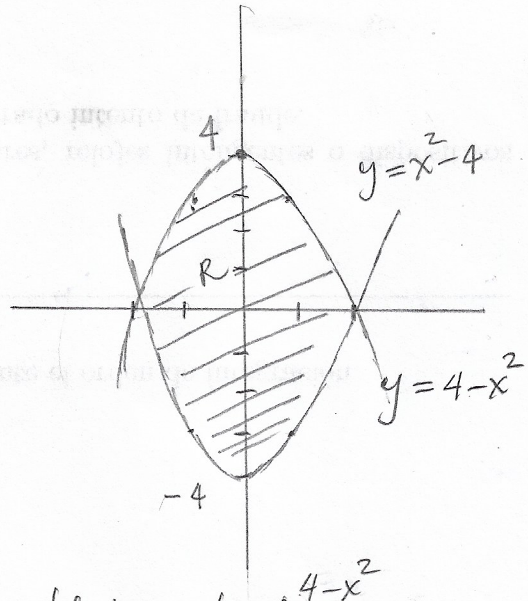
stv

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le x\}$

ⓑ y ⓒ:

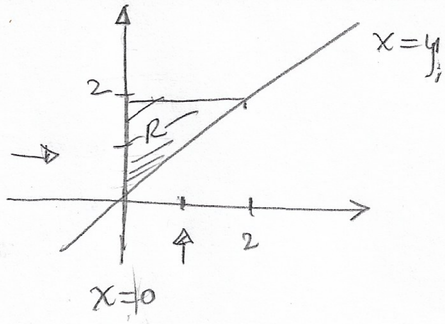
$\int_0^1\int_y^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx = \frac{1}{3}$

4)



$a(R) = \iint_R dA = \int_{-2}^2\int_{x^2-4}^{4-x^2} dy\,dx = \frac{64}{3}$

5)



$a(R) = \frac{2\times 2}{2} = 2.$

$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^2\int_0^y 2x\sqrt{1+y^3}\,dx\,dy = \frac{52}{9}$

$\Rightarrow V_p(f) = \frac{1}{2}\cdot\frac{52}{9} = \frac{26}{9}.$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202210
Fila B
Mayo 7 de 2022

Nombre completo:______________________________ Código:______________________________

1. **[6 pts]** Evalúe la integral dada a continuación.

$$\int_1^2 \int_0^4 \left(x^2 - 2xy^2\right) dxdy.$$

---

2. **[7 pts]** Dibuje la región R de integración y cambie el orden de integración.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y) dxdy.$$

---

3. **[15 pts]** Considere la integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{2+y^3} dydx.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.

   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.

   (c) [5 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. **[10 pts]** Use una integral doble para calcular el área de la región R acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.

---

5. **[12 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y) = e^{x^4}$$

sobre la región $R: 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq x^3$. Escoja cuidadosamente el orden de integración.

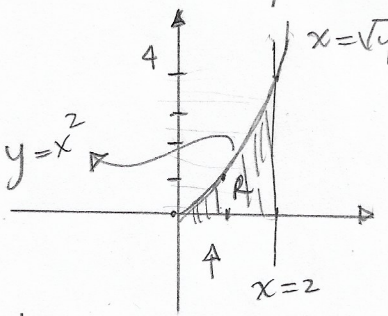
Tiempo máximo: 110 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución fila B.

1) $\displaystyle\int_1^2\int_0^4 (x^2-2xy^2)\,dx\,dy=-16.$

2) sth de $R: 0\le y\le 4 \wedge \sqrt{y}\le x\le 2$

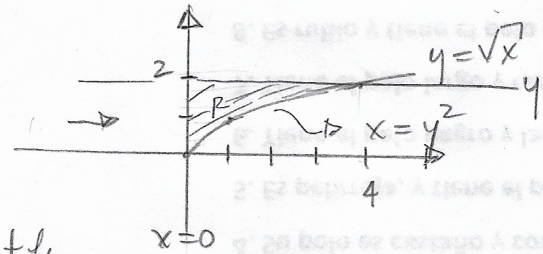


stv

$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2 \wedge 0\le y\le x^2\}$

$$\Rightarrow \int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

3) ⓐ stv: $0\le x\le 4 \wedge \sqrt{x}\le y\le 2.$



sth

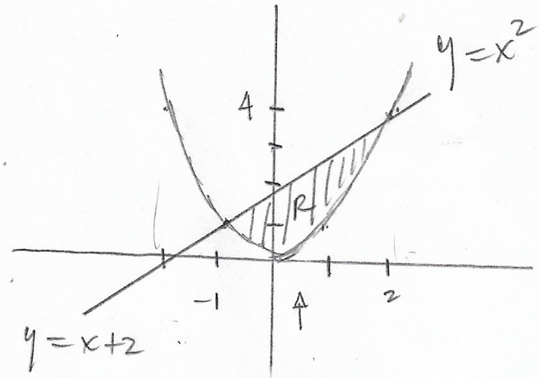
$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 2 \wedge 0\le x\le y^2\}$

ⓑ y ⓒ:

$$\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{2+y^3}\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^{y^2}\frac{3}{2+y^3}\,dx\,dy$$

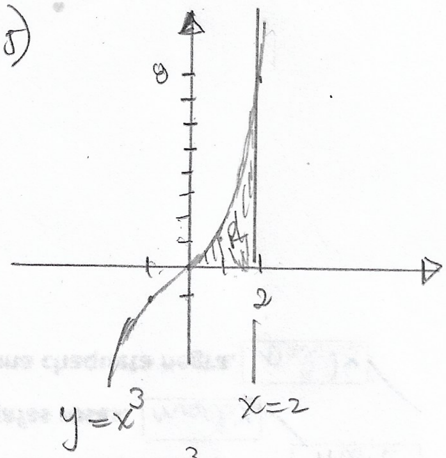
$$=\ln 5.$$

4)



$$a(R)=\iint_R dA=\int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx=\frac{9}{2}$$

5)



$$a(R)=\int_0^2\int_0^{x^3} dy\,dx=4$$

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_0^2\int_0^{x^3} e^{x^4}\,dy\,dx=\frac{e^{16}-1}{4}$$

$$\Rightarrow V_p(f)=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{16}-1}{4}$$

$$=\frac{e^{16}-1}{16}.$$