UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística

Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202230

Fila A

Octubre 29 de 2022

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. **[10 pts]** Encuentre el valor de la integral doble dada a continuación.

$$\int_0^{\ln 4}\int_{-2}^{0}\left(2xe^y+1\right)dxdy.$$

---

2. **[10 pts]** Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^{1}\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)dxdy.$$

---

3. **[20 pts]** Considere la integral

$$\int_0^{1}\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}dxdy.$$

(a) [5 pts] Trace la región de integración.

(b) [5 pts] Invierta el orden de integración.

(c) [10 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. **[10 pts]** Use una integral doble para determinar el área de la región limitada por $y=4-x^2$, $y=x-2$, $x=0$ y localizada en los cuadrantes I y IV.

---

5. **[10 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+1}$$

sobre la región $R: 0\le x\le 1 \wedge 1\le y\le 3$. Escoja cuidadosamente el orden de integración.

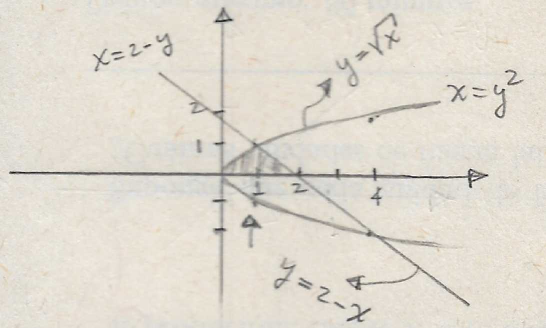
Tiempo máximo: 110 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución de la fila A

① $\displaystyle\int_0^{\ln 4}\int_{-2}^{0}(2xe^{y}+1)\,dx\,dy = -12+4\ln 2$

② $R \overset{sth}{:}\ 0\le y\le 1 \ \wedge\ y^2\le x\le 2-y$



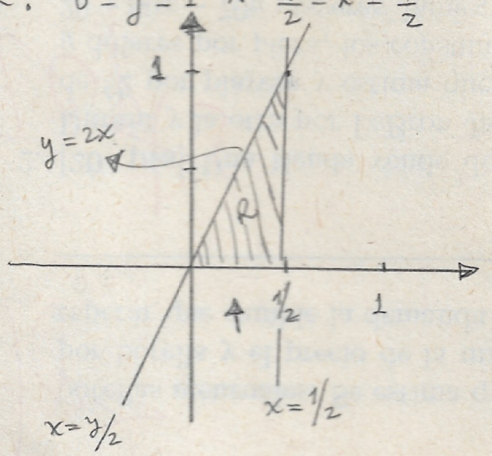
$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\mid 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le \sqrt{x}\}$
$\cup\{(x,y)\mid 1\le x\le 2 \wedge 0\le y\le 2-x\}$

Entonces,

$\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

$\displaystyle= \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$

③ $R \overset{sth}{:}\ 0\le y\le 1 \ \wedge\ \frac{y}{2}\le x\le \frac{1}{2}$

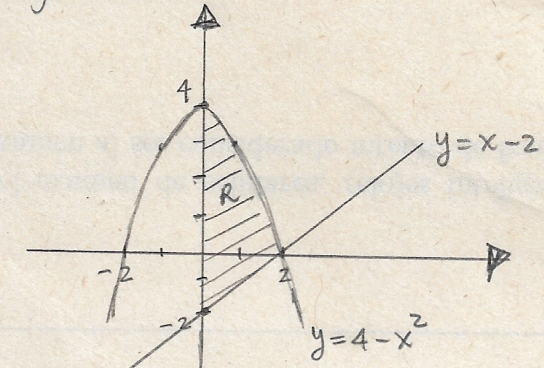


$R \overset{stv}{:}\ 0\le x\le 1/2 \ \wedge\ 0\le y\le 2x.$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^1\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\int_0^{2x} e^{-x^2}\,dy\,dx$

$\displaystyle= 1-\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

④



$\displaystyle a(R) = \int_0^2\int_{x-2}^{4-x^2} dy\,dx = 22/3$

⑤ $\underbrace{R:\ 0\le x\le 1 \ \wedge\ 1\le y\le 3}_{\text{Ractángulo}} \Rightarrow a(R) = 1\cdot 2 = 2.$

$\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_1^3 \frac{2xy}{x^2+1}\,dy\,dx = 4\ln 2$

$\displaystyle\Rightarrow v_p = \frac{1}{a(R)}\iint_R f(x,y)\,dA = \frac{1}{2}\cdot 4\ln 2 = 2\ln 2$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202230
Fila B
Octubre 29 de 2022

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. [**10 pts**] Encuentre el valor de la integral doble dada a continuación.

$$\int_0^{\ln 3}\int_0^1 (4ye^x - 1)\,dydx.$$

---

2. [**10 pts**] Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy.$$

---

3. [**20 pts**] Considere la integral

$$\int_0^2\int_{x^2}^4 \frac{4x}{1+y^2}dydx.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [10 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. [**10 pts**] Use una integral doble para determinar el área de la región limitada por $y = 4 - x^2$, $y = -x - 2$, $x = 0$ y localizada en los cuadrantes II y III.

---

5. [**10 pts**] Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y) = 2xye^{x^2}$$

sobre la región $R : 0 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 2$. Escoja cuidadosamente el orden de integración.

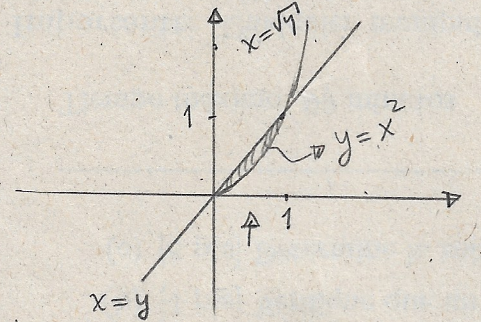
Tiempo máximo: 110 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución de la fila B

① $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\int_0^{1} (4ye^{x}-1)\,dy\,dx = 4-\ln 3$

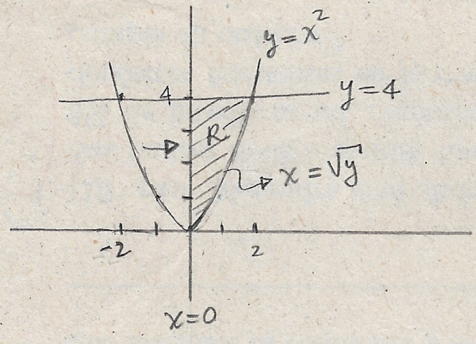
② $R^{sth}: \ 0\le y\le 1 \ \wedge \ y\le x\le \sqrt{y}$



$R^{stv}: \ 0\le x\le 1 \ \wedge \ x^2\le y\le x$

$$\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$$

③ $R^{stv}: \ 0\le x\le 2 \ \wedge \ x^2\le y\le 4$

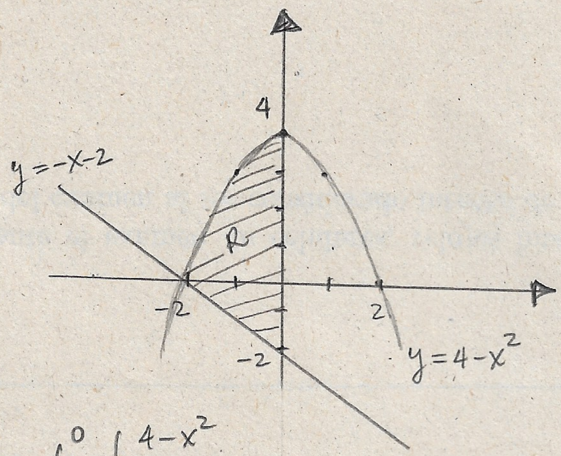


$R^{sth}: \ 0\le y\le 4 \ \wedge \ 0\le x\le \sqrt{y}$

$$\Rightarrow \int_0^2\int_{x^2}^{4} \frac{4x}{1+y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} \frac{4x}{1+y^2}\,dx\,dy = \ln 17$$

④



$$a(R) = \int_{-2}^{0}\int_{-x-2}^{4-x^2} dy\,dx = 22/3$$

⑤ $\underbrace{R: \ 0\le x\le 1 \ \wedge \ -1\le y\le 2}_{\text{Rectángulo}} \Rightarrow a(R) = 1\cdot 3 = 3$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_{-1}^{2} 2xye^{x^2}\,dy\,dx = \frac{3}{2}(e-1)$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{1}{a(R)}\iint_R f(x,y)\,dA = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(e-1) = \frac{1}{2}(e-1)$$