UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística

Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202310

Fila A

Abril 29 de 2023

Nombre completo:__________________________________Código:__________________________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. **[10 pts]** Encuentre el valor de la integral doble dada a continuación.

$$\int_0^3 \int_{-2}^0 \left(x^2y - 2xy^2\right) dydx.$$

---

2. **[10 pts]** Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^2 \int_0^{4-y^2} f(x,y)dxdy.$$

---

3. **[20 pts]** Considere la integral

$$\int_0^4 \int_x^4 \sqrt{9+y^2}dydx.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [10 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. **[10 pts]** Use integrales dobles para determinar el área de la región limitada por las rectas $y = x - 2$ y $y = -x$ y la curva $y = \sqrt{x}$.

---

5. **[10 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y) = 2ye^{x^3}$$

sobre la región triangular determinada por los puntos $(0,0)$, $(3,0)$ y $(3,1)$.

Tiempo máximo: 110 minutos.

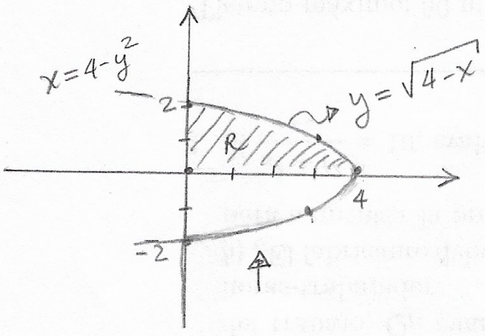
Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución de la fila A

① $\displaystyle\int_0^3\int_{-2}^0 (x^2y-2xy^2)\,dy\,dx=-42.$

② La región de la integral es

$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 2 \ \wedge \ 0\le x\le 4-y^2\}$



$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 4 \ \wedge \ 0\le y\le \sqrt{4-x}\}$

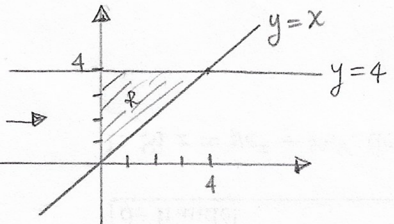
Por tanto,

$$\int_0^2\int_0^{4-y^2} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

③

a) Región de integración

$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 4 \ \wedge \ x\le y\le 4\}$



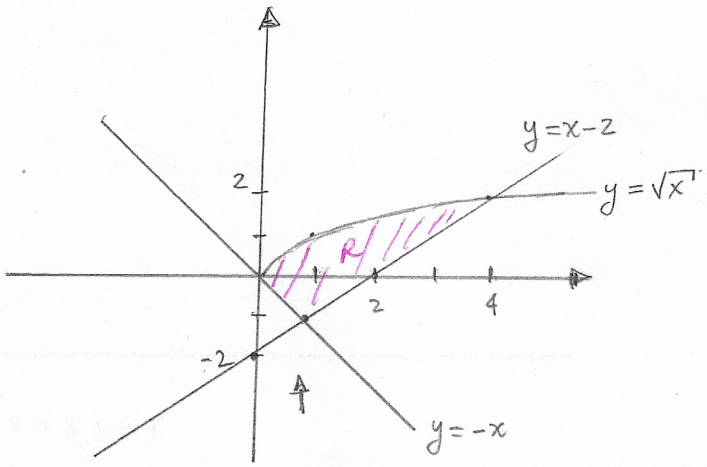
$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 4 \ \wedge \ 0\le x\le y\}$

b) Cambio del orden de integración

$$\int_0^4\int_x^4 \sqrt{9+y^2}\,dy\,dx=\int_0^4\int_0^y \sqrt{9+y^2}\,dx\,dy$$

c) $\displaystyle\int_0^4\int_0^y \sqrt{9+y^2}\,dx\,dy=\frac{98}{3}.$

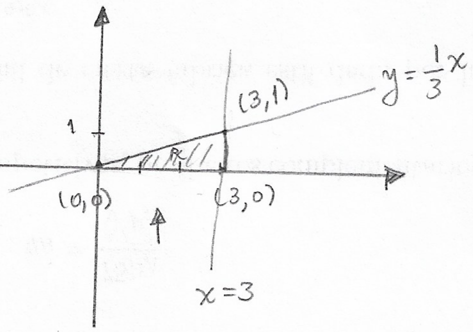
④



$$a(R)=\int_0^1\int_{-x}^{\sqrt{x}} dy\,dx+\int_1^4\int_{x-2}^{\sqrt{x}} dy\,dx$$

$$=\frac{7}{6}+\frac{19}{6}=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}.$$

⑤



i) $a(R)=\dfrac{\text{base}\times\text{altura}}{2}$

$=\dfrac{3\cdot 1}{2}=3/2$

ii) $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA=\int_0^3\int_0^{\frac{1}{3}x} 2y\,e^{x^3}\,dy\,dx=\frac{e^{27}-1}{27}.$

$$\Rightarrow \vartheta_p=\frac{1}{a(R)}\iint_R f(x,y)\,dA$$

$$=\frac{1}{3/2}\cdot\frac{e^{27}-1}{27}=\frac{2}{81}\left(e^{27}-1\right).$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202310
Fila B
Abril 29 de 2023

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. **[10 pts]** Encuentre el valor de la integral doble dada a continuación.

$$\int_0^2 \int_{-1}^0 \left(-3x^2y + xy^2\right) dxdy.$$

---

2. **[10 pts]** Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_{-2}^0 \int_0^{4-x^2} f(x,y)dydx.$$

---

3. **[20 pts]** Considere la integral

$$\int_0^3 \int_y^3 \sqrt{16+x^2}dxdy.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [10 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. **[10 pts]** Use integrales dobles para determinar el área de la región limitada por las rectas $x = y - 2$ y $x = -y$ y la curva $x = \sqrt{y}$.

---

5. **[10 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y) = 2xe^{y^3}$$

sobre la región triangular determinada por los puntos $(0,0)$, $(0,3)$ y $(6,3)$.

Tiempo máximo: 110 minutos.

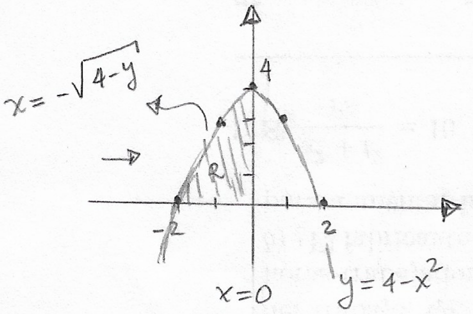
Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución de la fila B

① $\displaystyle\int_0^2\int_{-1}^0 (-3x^2y+xy^2)\,dx\,dy = -\frac{10}{3}.$

② La región de la integral es

$R \overset{\text{stv}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\le x\le 0 \ \wedge\ 0\le y\le 4-x^2\}$



$R \overset{\text{sth}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 4 \ \wedge\ -\sqrt{4-y}\le x\le 0\}$

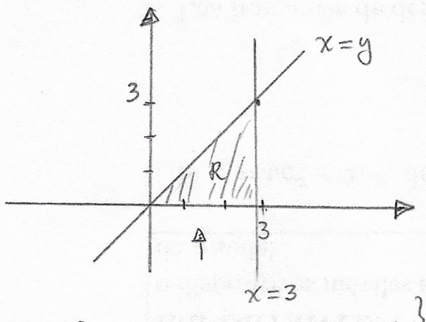
Por tanto,

$$\int_{-2}^0\int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^4\int_{-\sqrt{4-y}}^0 f(x,y)\,dx\,dy$$

③

a) Región de integración

$R \overset{\text{sth}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 3 \ \wedge\ y\le x\le 3\}$



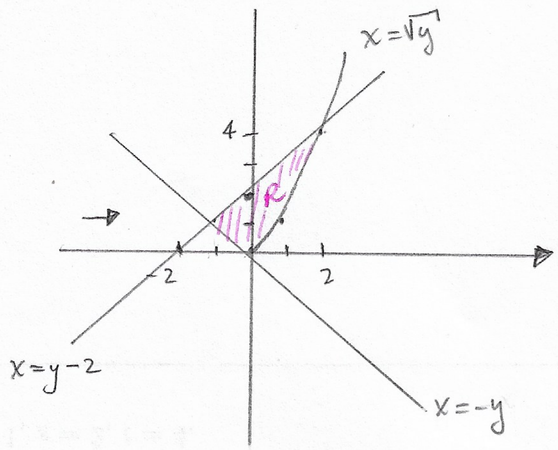
$R \overset{\text{stv}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 3 \ \wedge\ 0\le y\le x\}$

b) Cambio del orden de integración

$$\int_0^3\int_y^3 \sqrt{16+x^2}\,dx\,dy = \int_0^3\int_0^x \sqrt{16+x^2}\,dy\,dx$$

c) $\displaystyle\int_0^3\int_0^x \sqrt{16+x^2}\,dy\,dx = \frac{61}{3}$

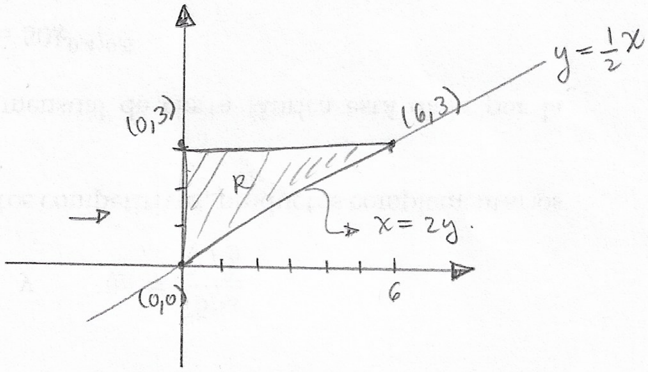
④



$$a(R) = \int_0^1\int_{-y}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{19}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

⑤



i) $a(R) = \dfrac{\text{base}\times\text{altura}}{2}$

$= \dfrac{3\cdot 6}{2} = 9$

ii) $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^3\int_0^{2y} 2xe^{y^3}\,dx\,dy = \frac{4}{3}(e^{27}-1)$

$$\Rightarrow\ v_p = \frac{1}{a(R)}\iint_R f(x,y)\,dA$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{4}{3}(e^{27}-1) = \frac{4}{27}(e^{27}-1).$$