UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202330
Octubre 27 de 2023

Nombre completo:____________________Código:____________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. [**10 pts**] Encuentre el valor de la integral doble dada a continuación.

$$\int_1^2 \int_{-3}^1 \left(2x^3 + xy^2\right) dxdy.$$

---

2. [**10 pts**] Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx.$$

---

3. [**20 pts**] Considere la integral

$$\int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^2 \frac{1}{1+y^2} dydx.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [10 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. [**10 pts**] Use integrales dobles para determinar el área de la región del primer cuadrante limitada por $y = 4 - x^2$, $y = 3x$ y $y = 0$.

---

5. [**10 pts**] Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y) = e^{y^2}$$

sobre la región limitada por $x = 2y$, $x = 0$ y $y = 1$.

Tiempo máximo: 100 minutos.

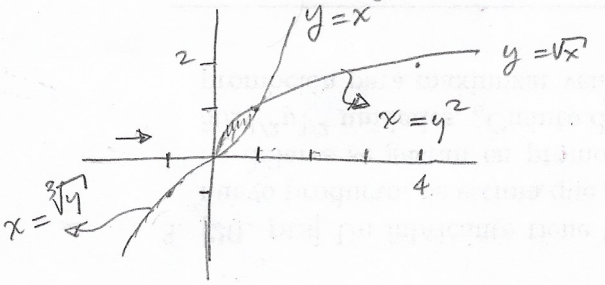
Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solución

1) $\displaystyle\int_1^2\int_{-3}^1 (2x^3+xy^2)\,dx\,dy = -\frac{148}{3}$

2) La región que define los límites de la integral es

$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \wedge x^3\le y\le \sqrt{x}\}$



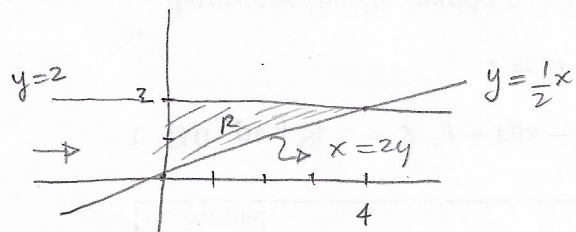
$R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1 \wedge y^2\le x\le \sqrt[3]{y}\}$

Luego,

$\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$

3) Región de integración

$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 4 \wedge \frac{1}{2}x\le y\le 2\}$



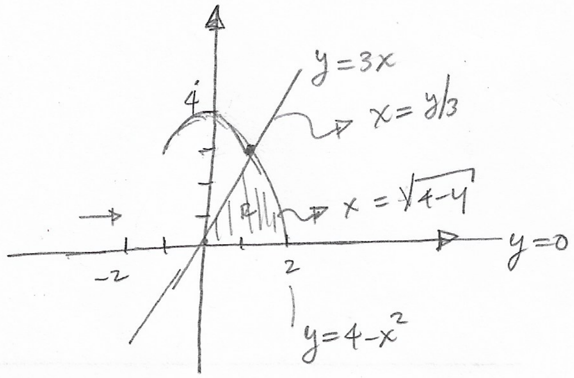
$R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 2 \wedge 0\le x\le 2y\}$

Entonces,

$\displaystyle\int_0^4\int_{\frac{1}{2}x}^2 \frac{1}{1+y^2}\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^{2y} \frac{1}{1+y^2}\,dx\,dy$

$= \ln 5.$

4)

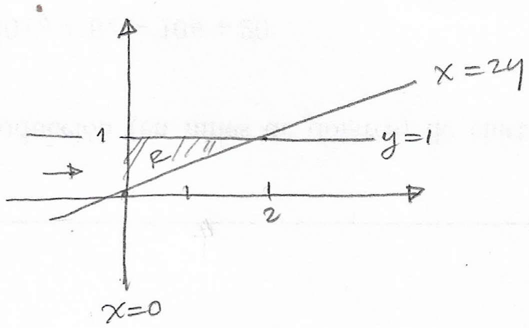


$R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 3 \wedge y/3\le x\le \sqrt{4-y}\}$

Luego,

$\displaystyle a(R) = \iint_R dA = \int_0^3\int_{y/3}^{\sqrt{4-y}} dx\,dy = \frac{19}{6}$

5)



$a(R) = \dfrac{\text{base x altura}}{2} = \dfrac{1\times 2}{2} = 1$

$\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{2y} e^{y^2}\,dx\,dy = e-1$

$\displaystyle\Rightarrow v_p = \frac{1}{a(R)}\iint_R f(x,y) = e-1.$