UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 202530
Noviembre 1 de 2025

Nombre completo:____________________ Código:____________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. **[10 pts]** Resuelva la integral doble

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}(x^2-3xy)\,dydx.$$

---

2. **[10 pts]** Plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\,dydx.$$

---

3. **[20 pts]** Tenga en cuenta los pasos de abajo para determinar el valor de la integral

$$\int_{0}^{2}\int_{x}^{2} x\sqrt{1+y^3}\,dydx.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [10 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

4. **[10 pts]** Emplee una integral doble para determinar el área del triángulo con vértices en los puntos $(0,-1)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

---

5. **[10 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y)=e^{x^3}$$

sobre la región del plano cartesiano $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le x^2\}$.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude.

Solucionario

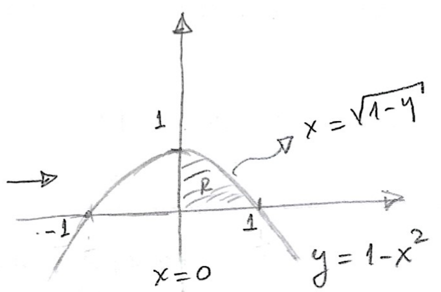
1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{0}^{3}(x^2-3xy)\,dy\,dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^{2}\left(x^2y-\tfrac{3}{2}xy^2\right)\Big|_0^3 dx = \int_{-1}^{2}\left(3x^2-\tfrac{27}{2}x\right)dx$

$\displaystyle = \left(x^3-\tfrac{27}{4}x^2\right)\Big|_{-1}^{2} = (8-27)-\left(-1-\tfrac{27}{4}\right) = -\frac{45}{4}$

2) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le 1-x^2\}$



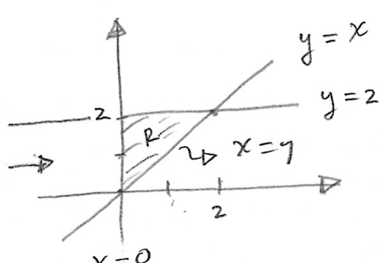
$R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1 \wedge 0\le x\le \sqrt{1-y}\}$

Por tanto,

$$\int_0^1\int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\,dy$$

3) Gráfica de la región de integración

$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2 \wedge x\le y\le 2\}$

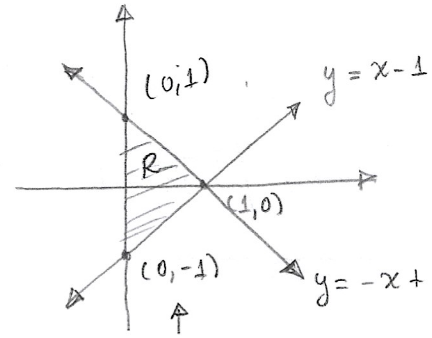


Cambio del orden de integración

$R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 2 \wedge 0\le x\le y\}$

$$\Rightarrow \int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^y x\sqrt{1+y^3}\,dx\,dy$$

4)

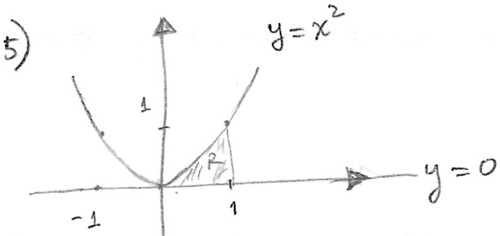


$R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \wedge x-1\le y\le -x+1\}$

Entonces,

$$a(R) = \iint_R dA = \int_0^1\int_{x-1}^{-x+1} dy\,dx = 1$$

5)



- $\displaystyle a(R) = \int_0^1\int_0^{x^2} dy\,dx = 1/3$
- $\displaystyle \iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_0^{x^2} e^{x^3}\,dy\,dx = \frac{e-1}{3}$

Entonces,

$$\bar{f}_R = \frac{1}{a(R)}\iint_R f(x,y)\,dA = e-1.$$

Continuación del punto 3):

$$\int_0^2\int_0^y x\sqrt{1+y^3}\,dx\,dy = \frac{26}{9}.$$