Alumno:______________________________ Código:______________ Fila: AAAA

Observaciones.

1. Duración del examen: 90 Minutos.
2. Es prohibido el préstamo de objetos durante el examen.
3. Es prohibido el uso o poseción de dispositivos electrónicos.
4. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.

Ejercicio 1. (10 ptos):

Evalué la integral

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y)dy \right) dx.$$

Ejercicio 2.(15 ptos):

Escoja cuidadosamente el orden de integración para calcular la integral

$$\iint_R \frac{1}{x^2+1} dA,$$

donde R es el triángulo limitado por las rectas $y = 3x$, $y = -x$ y $x = 1$.

Ejercicio 3.(10 ptos):

Use una integral doble para hallar el área de R, donde R es la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $y + x = 1$ y $x = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 4.(15 ptos):

En cierta fábrica, la producción P está relacionada con las entradas x y y por la expresión

$$P(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3.$$

Si $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 7$, ¿cuál es el promedio de producción de la fábrica?

ÉXITOS

Solución: Fila A

- **Ejercicio 1.**

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(2y - xy - y^2\right) |_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} \, dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{1}{3} = 0,333...$$

- **Ejercicio 2.** La región de integración es

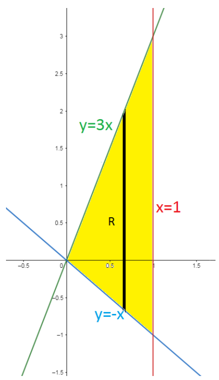

Figure 1: Región R

En este caso:

$$R = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x \leq y \leq 3x \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\iint_R \frac{1}{x^2+1} dA = \int_0^1 \int_{-x}^{3x} \frac{1}{x^2+1} dy dx = \int_0^1 \frac{4x}{x^2+1} dx = 2 \ln 2 = 1,38629...$$

- **Ejercicio 3.** La región R, para hallar el área es

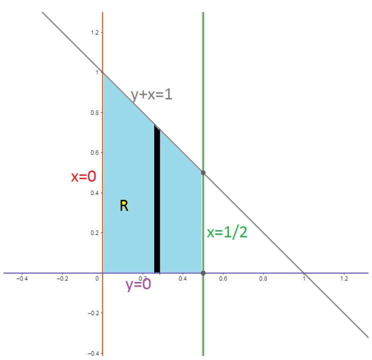

Figure 2: Región R

En este caso:

$$R = \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$a(R) = \iint_R 1 dA = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{1-x} 1 dy dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x) dx = \frac{3}{8} = 0,375$$

- **Ejercicio 4.** El valor promedio es:

$$V_P = \frac{1}{a(R)} \iint_R P(x, y) dA = \frac{1}{35} \int_0^7 \left(\int_0^5 (2x^3 + 3x^2 y + y^3) dx \right) dy = \frac{1}{14} \int_0^7 \left(2y^3 + 50y + 125\right) dy = \frac{943}{4} = 235,75$$

Alumno:__________________________________ Código:________________ Fila: BBBB

Observaciones.

1. Duración del examen: 90 Minutos.
2. Es prohibido el préstamo de objetos durante el examen.
3. Es prohibido el uso o poseción de dispositivos electrónicos.
4. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.

Ejercicio 5. (10 ptos):

Evalué la integral

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} (2-2x-y)dx \right) dy.$$

Ejercicio 6.(15 ptos):

Escoja cuidadosamente el orden de integración para calcular la integral

$$\iint_R \frac{1}{x^2+1} dA,$$

donde R es el triángulo limitado por las rectas $y=-3x$, $y=x$ y $x=-1$.

Ejercicio 7.(10 ptos):

Use una integral doble para hallar el área de R, donde R es la región limitada por $x=0$, $y=0$, $y-x=1$ y $x=-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 8.(15 ptos):

En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con las entradas x y y por la expresión

$$Q(x,y)=x^3+3xy^2+2y^3.$$

Si $0 \leq x \leq 7$ y $0 \leq y \leq 5$, ¿cuál es el promedio de producción de la fábrica?

ÉXITOS

Solución: Fila B

- **Ejercicio 1.**

$$\int_0^1 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} (2-2x-y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(2x - x^2 - xy\right) |_{\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} dy = \int_0^1 \left(y^2 - 2y + 1\right) dy = \frac{1}{3} = 0,333...$$

- **Ejercicio 2.** La región de integración es

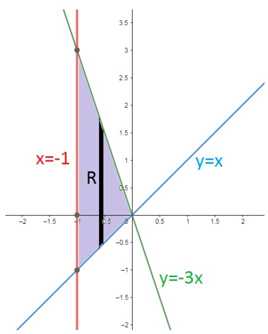

Figure 3: Región R

En este caso:

$$R = \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \leq y \leq -3x \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\iint_R \frac{1}{x^2+1} dA = \int_{-1}^{0} \int_{x}^{-3x} \frac{1}{x^2+1} dydx = -\int_{-1}^{0} \frac{4x}{x^2+1} dx = 2\ln 2 = 1,38629...$$

- **Ejercicio 3.** La región R, para hallar el área es

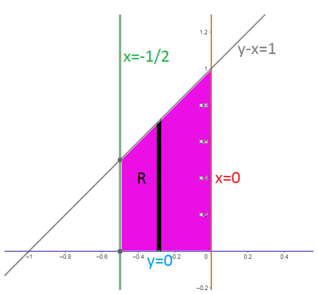

Figure 4: Región R

En este caso:

$$R = \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 + x \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$a(R) = \iint_R 1 dA = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \int_{0}^{1+x} 1 dydx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1+x)dx = \frac{3}{8} = 0,375$$

- **Ejercicio 4.** El valor promedio es:

$$V_P = \frac{1}{a(R)} \iint_R Q(x,y)dA = \frac{1}{35} \int_0^5 \left(\int_0^7 (x^3 + 3xy^2 + 2y^3)dx \right) dy = \frac{1}{20} \int_0^5 \left(8y^3 + 42y^2 + 343\right) dy = \frac{943}{4} = 235,75$$