UNIVERSIDAD DEL NORTE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

TERCER PARCIAL DE CÁLCULO 3 ANEC

Nombre: ____

Observaciones: El examen tiene una duración de 90 minutos. Justifique sus respuestas. Es prohibido el préstamo de cualquier tipo de material, calculadoras, etc. Es prohibido el uso de calculadoras que involucren lenguaje simbólico. El uso y/o posesión del celular durante el examen es causal de anulación.

CUESTIONARIO A.

1) **(Valor 1.0)** Evalúe las integrales dadas.
   (a) $\int_0^1 \int_1^2 x^2 y dx dy$
   (b) $\int_2^3 \int_{-1}^1 (x + 3y) dx dy$

2) **(Valor 1.0)** Evalúe la integral doble $\iint_R (x + 3y) dA$, donde R es el triángulo con vértices $(0,0), (3,0)$ y $(0,2)$.

3) **(Valor 1.5)** Dibuje la región de integración para la integral $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$ y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

4) **(Valor 1.5)** Encuentre el valor promedio de la función $f(x, y) = 3xy$ sobre la región R, donde R es el triángulo con vértices $(0,0), (0,2)$ y $(3,2)$.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

TERCER PARCIAL DE CÁLCULO 3 ANEC

Nombre: ____

Observaciones: El examen tiene una duración de 90 minutos. Justifique sus respuestas. Es prohibido el préstamo de cualquier tipo de material, calculadoras, etc. Es prohibido el uso de calculadoras que involucren lenguaje simbólico. El uso y/o posesión del celular durante el examen es causal de anulación.

CUESTIONARIO B.

1) **(Valor 1.0)** Evalúe las integrales dadas.
   (a) $\int_1^2 \int_0^3 xy^2 dxdy$
   (b) $\int_1^3 \int_{-2}^1 (3x+y)dydx$

2) **(Valor 1.0)** Evalúe la integral doble $\iint_R (3x+2y)dA$, donde R es el triángulo con vértices $(0,0), (2,0)\ y\ (0,3)$.

3) **(Valor 1.5)** Dibuje la región de integración para la integral $\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$ y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

4) **(Valor 1.0)** Encuentre el valor promedio de la función $f(x,y) = 2xy$ sobre la región R, donde R es el triángulo con vértices $(0,0), (0,2)\ y\ (4,2)$.

SOLUCIÓN DEL TERCER PARCIAL FILA A

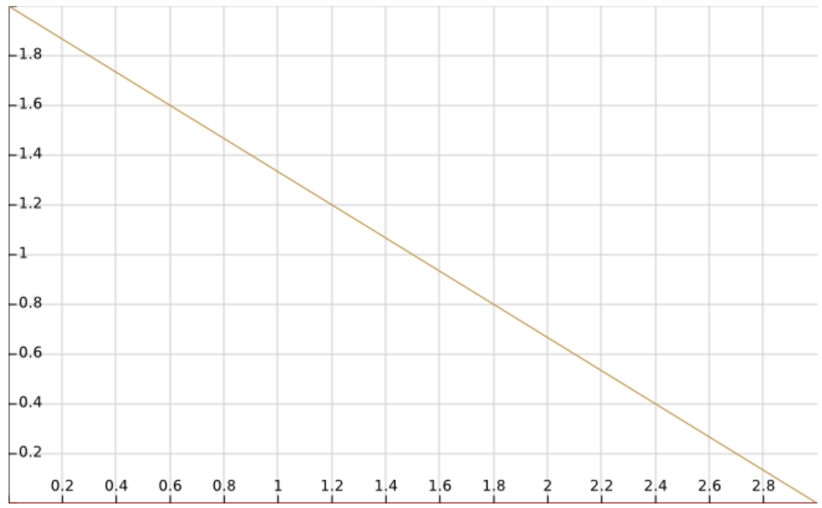
Numeral 1.

(a) $\int_0^1 \int_1^2 x^2 y dx dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3 y}{3}\right)\Big|_1^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{8}{3}y - \frac{1}{3}y\right) dy = \frac{7}{6}$.

(b) $\int_2^3 \int_{-1}^1 (x+3y) dx dy = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} + 3xy\right)\Big|_{-1}^1 dy = \int_2^3 (6y) dy = 15$.

Numeral 2.

El Triángulo con vértices $(0,0), (3,0)\ y\ (0,2)$ está dado por:



Determinado por la región R, descrita de la siguiente forma:

$R: 0 \le x \le 3 \quad , \quad 0 \le y \le -\frac{2}{3}x + 2,$

por lo tanto,

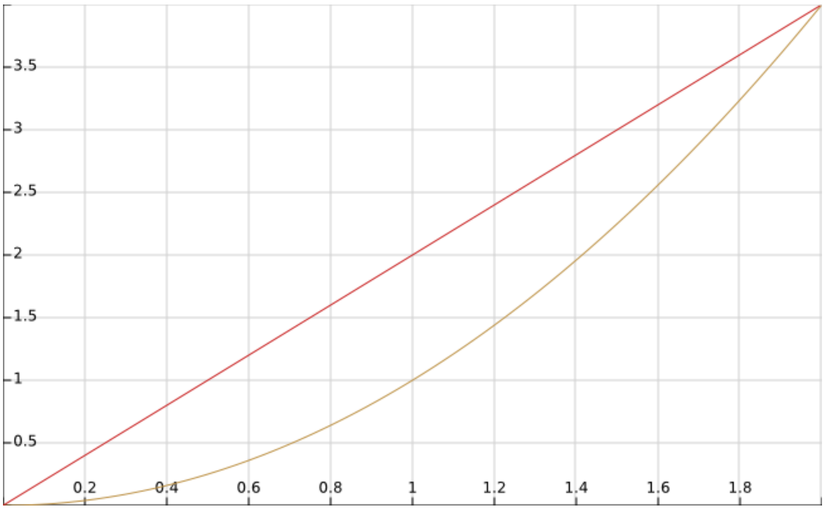
$$\iint_R (x+3y) dA = \int_0^3 \int_0^{-\frac{2}{3}x+2} (x+3y) dy dx$$

$$= \int_0^3 \left(xy + \frac{3}{2}y^2\right)\Big|_0^{-\frac{2}{3}x+2} dx$$

$$= \int_0^3 (-2x+6) dx = 9.$$

Numeral 3.

La región es la siguiente:



y está determinada por secciones transversales verticales de la siguiente forma:

$$R: 0 \leq x \leq 2 \;,\; x^2 \leq y \leq 2x$$

Por lo tanto:

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx$$

Numeral 4.

El área del triángulo es $Area(R) = 3$.

Por otra parte, la región está determinada de la siguiente manera:

$$R:\; 0 \leq x \leq 3 \;,\; \frac{2}{3}x \leq y \leq 2$$

Con lo cual,

$$\iint_R 3xydA = \int_0^3 \int_{\frac{2}{3}x}^{2} 3xydydx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{3}{2}xy^2\right)\Big|_{\frac{2}{3}x}^{2} dx$$

$$= \frac{27}{2}.$$

En virtud de lo anterior,

$$VP = \frac{1}{Area(R)} \iint_R 3xydA = \frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{9}{2}.$$

SOLUCIÓN DEL TERCER PARCIAL FILA B

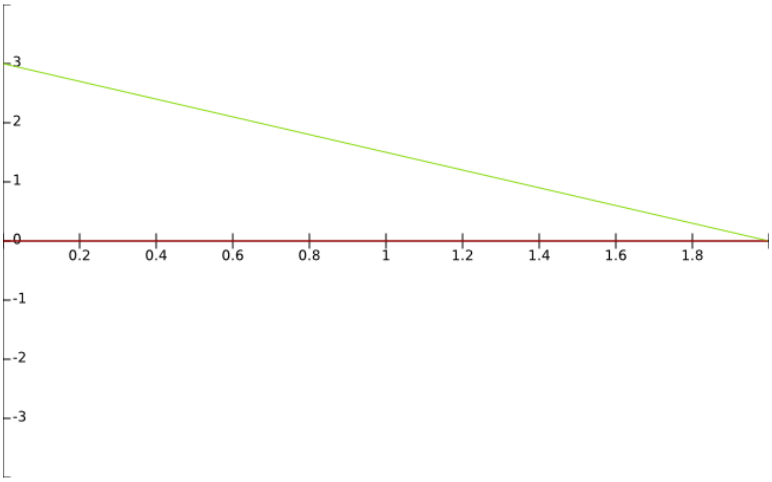
Numeral 1

(a) $\int_1^2 \int_0^3 xy^2 dxdy = \int_1^2 \left(\frac{x^2y^2}{2}\right)\Big|_0^3 dy = \int_1^2 \frac{9}{2} y^2 dy = \frac{21}{2}$.

(b) $\int_1^3 \int_{-2}^1 (3x+y)dydx = \int_1^3 \left(3xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-2}^1 dx = \int_1^3 \left(9x - \frac{3}{2}\right) dx = 33.$

Numeral 2.

El Triángulo con vértices $(0,0), (3,0)$ y $(0,2)$ está dado por:



Determinado por la región R, descrita de la siguiente forma:

$R: 0 \leq x \leq 2 \quad , \quad 0 \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3,$

por lo tanto,

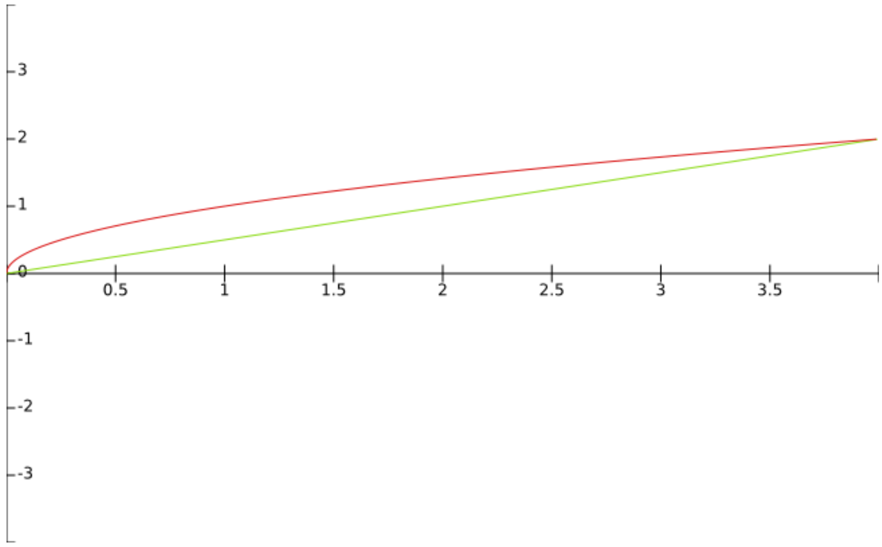
$$\iint_R (3x+2y)dA = \int_0^2 \int_0^{-\frac{3}{2}x+3} (3x+2y)dydx$$

$$= \int_0^2 (3xy + y^2)\Big|_0^{-\frac{3}{2}x+3} dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{9}{4}x^2 + 9\right) dx = 12.$$

Numeral 3.

La región es la siguiente:



y está determinado por secciones transversales horizontales de la siguiente forma:

$$R:\ 0 \leq y \leq 2 \ \ , \ \ y^2 \leq x \leq 2y$$

por lo tanto:

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx = \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dxdy$$

Numeral 4.

El área del triángulo es $Area(R) = 4$.

Por otra parte, la región está determinada de la siguiente manera:

$$R:\ 0 \leq x \leq 4 \ \ , \ \ \frac{1}{2}x \leq y \leq 2$$

Con lo cual,

$$\iint_R 2xydA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{2} 2xydydx$$

$$= \int_0^4 (xy^2)\Big|_{\frac{1}{2}x}^{2} dx$$

$$= 16.$$

En virtud de lo anterior,

$$VP = \frac{1}{Area(R)} \iint_R 2xydA = \frac{1}{4}(16) = 4.$$