UNIVERSIDAD DEL NORTE

TERCER PARCIAL DE CALCULO 3 ANEC AAAA

PROFESOR: JAIDER E. BLANCO G.

Alumno: ______________________________ código: __________________

Observaciones

1. Duración: 90 Minutos
2. Está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Es prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos.
4. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.

1. En cierta fabrica, la producción la proporciona la función de producción de Cobb-Douglas

$$Q(K, L) = 50K^{3/5}L^{2/5}$$

Donde K es la inversión de capital en unidades de \$1000 y L es el tamaño de la fuerza laboral medida en horas – trabajador. Suponga que la inversión mensual de capital varía entre \$10 000 y \$12 000, mientras que la fuerza laboral mensual varía entre 2 800 y 3 200 horas-trabajador. Encuentre la producción promedio mensual para la fábrica.

2. Evalúe estas integrales.

a. $\int_2^3 \int_1^2 \frac{x+y}{xy} dydx$

b. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} x^2y\, dydx$

3. Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y)dxdy$$

4. Use una integral doble para hallar el área de R, donde R es la región limitada por

$$y = 6 - x^2 \qquad Y \qquad y = 5x$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

TERCER PARCIAL DE CALCULO 3 ANEC BBBB

PROFESOR: JAIDER E. BLANCO G.

Alumno: ______________________________ código: __________________

Observaciones

1. Duración: 90 Minutos
2. Está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Es prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos.
4. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.

1. Una placa metálica plana que se encuentra en el plano xy se calienta de tal forma que la temperatura es de $T^{o}C$, donde

$$T(x,y) = 10ye^{-xy}$$

Encuentre la temperatura promedio sobre la parte de la placa para la que $1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq 1/y$.

2. Evalúe la integral doble. Quizás sea necesario intercambiar el orden de integración.

a. $\int_1^2 \int_0^x \ e^{y/x} dydx$

b. $\int_0^2 \int_0^2 \ \frac{6xy^2}{x^2+1} dydx$

3. Use una integral doble para hallar el área de R, donde R es la región limitada por

$$y = \frac{16}{x}, \qquad y = x \ , \qquad Y \qquad x = 8.$$

4. Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

TERCER PARCIAL DE CALCULO 3 ANEC AAAA

UNIVERSIDAD DEL NORTE

1. En cierta fabrica, la producción la proporciona la función de producción de Cobb-Douglas

$$Q(K, L) = 50K^{3/5}L^{2/5}$$

Donde K es la inversión de capital en unidades de \$1000 y L es el tamaño de la fuerza laboral medida en horas – trabajador. Suponga que la inversión mensual de capital varía entre \$10 000 y \$12 000, mientras que la fuerza laboral mensual varía entre 2 800 y 3 200 horas-trabajador. Encuentre la producción promedio mensual para la fábrica.

Es razonable estimar la producción promedio mensual a través del valor promedio de $Q(K, L)$ sobre la región rectangular R: $10 \le K \le 12$, $2\,800 \le L \le 3\,200$. La región tiene área

$$\begin{aligned} A = \text{área de } R &= (12 - 10) \times (3\,200 - 2\,800) \\ &= 800 \end{aligned}$$

de modo que la producción promedio es

$$\begin{aligned} VP &= \frac{1}{800}\iint_R 50K^{3/5}L^{2/5}\,dA \\ &= \frac{1}{800}\int_{2,800}^{3,200}\left(\int_{10}^{12} 50K^{3/5}L^{2/5}\,dK\right) dL \\ &= \frac{1}{800}\int_{2,800}^{3,200} 50L^{2/5}\left(\frac{5}{8}K^{8/5}\right)\Bigg|_{K=10}^{K=12} dL \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)\int_{2,800}^{3,200} L^{2/5}(12^{8/5} - 10^{8/5})\,dL \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)(12^{8/5} - 10^{8/5})\left(\frac{5}{7}L^{7/5}\right)\Bigg|_{L=2\,800}^{L=3\,200} \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{7}\right)(12^{8/5} - 10^{8/5})[(3\,200)^{7/5} - (2\,800)^{7/5}] \\ &\approx 5\,181.23 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la producción promedio mensual es aproximadamente de 5 181 unidades.

2. Evalúe estas integrales.

a. $\int_2^3 \int_1^2 \frac{x+y}{xy} dydx$=

$$\int_2^3 \int_1^2 \frac{1}{y} + \frac{1}{x} dydx$$

$$= \int_2^3 \ln y + \frac{y}{x} |_2^3 dx$$

$$= \int_2^3 \ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{x} dx = 2 \ln 3 - 2 \ln 2$$

b. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} x^2 y \, dydx =$

$$\int_0^4 x^2 \frac{y^2}{2} |_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} |_0^4 = 32$$

3. Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dxdy$$

4. Use una integral doble para hallar el área de R, donde R es la región limitada por

$$y = 6 - x^2 \qquad Y \qquad y = 5x$$

Puntos de corte

$x = -6, x = -1$

$$R = \{-6 \leq x \leq 1, \qquad 5x \leq \ y \ \leq 6 - x^2\}$$

$$aR = \int_{-6}^{1}\int_{5x}^{6-x^2} 1dydx$$
$$= \int_{-6}^{1} 6 - x^2 - 5x\, dx = 6\big(1-(-6)\big) - \frac{(1)^3-(-6)^3}{3} - \frac{5((1)^2-(-6)^2)}{2}$$
$$= 42 - 72.33 + 87.5 = 57.17$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

TERCER PARCIAL DE CALCULO 3 ANEC BBBB

PROFESOR: JAIDER E. BLANCO G.

Alumno: ________________________________ código: ___________________

Observaciones

1. Duración: 90 Minutos
2. Está prohibido el préstamo de objetos durante el examen
3. Es prohibido el uso o posesión de dispositivos electrónicos.
4. Cualquier fraude o intento de fraude académico será causal de anulación.

1. Una placa metálica plana que se encuentra en el plano xy se calienta de tal forma que la temperatura es de $T^o C$, donde

$$T(x,y) = 10ye^{-xy}$$

Encuentre la temperatura promedio sobre la parte de la placa para la que $1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq 1/y$.

Área de la región de integración

$$a(R) = \int_1^2 \int_0^{1/y} 1\, dx\, dy = \int_1^2 \frac{1}{y}\ dy = ln2 = 0,69$$

$\int_1^2 \int_0^{1/y} 10ye^{-xy}\, dxdy = \int_1^2 10y\ \left.\frac{e^{-xy}}{-y}\right|_{0}^{\frac{1}{y}}\ dx = \int_1^2 -10e^{-1} + 10\ \ dx = -10e^{-1} + 10 =$ 6.32.

La temperatura promedio es TP= $\frac{6.32}{0.69} = 9,1°C$

2. Evalúe la integral doble. Quizás sea necesario intercambiar el orden de integración.

a. $\int_1^2 \int_0^x\ e^{y/x} dydx = \int_1^2 e^1 - e^0 dx = e - 1 = 1.71$

b. $\int_0^2 \int_0^2 \frac{6xy^2}{x^2+1} dydx =$

$$\int_0^2 \frac{6x}{x^2+1} \frac{8}{3} dx = \frac{24}{3} \ln(x^2+1)|_0^2 = \frac{24}{3} ln5$$

3. Use una integral doble para hallar el área de R, donde R es la región limitada por

$$y = \frac{16}{x}, \qquad y = x\ , \qquad Y \qquad x = 8.$$

$$R = \left\{4 \le x \le 8,\ \frac{16}{x} \le y \le x\right\}$$

$$aR = \int_4^8 \int_{\frac{16}{x}}^{x} 1\, dydx$$

$$= \int_4^8 x - \frac{16}{x}\ dx = \frac{8^2}{2} - \frac{4^2}{2} - 16 \ln 8 + 16 \ln 4 = 24 - 11{,}09 = 12.9$$

4. Dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una equivalente con el orden de integración invertido.

$$\int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)dydx$$

Región de integración

$$R = \{0 \le y \le 1, \qquad 0 \le x \le 2y\} = \left\{0 \le x \le 2,\ \ \frac{x}{2} \le y \le 1\right\}$$