UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 201930
Fila A
Octubre 21 de 2019

Nombre completo:________________________Código:________________________

1. **[10 pts]** Encuentre el valor de la integral

$$\int_{-2}^{3}\int_{0}^{2}\left(y^2-2xy\right)dydx.$$

---

2. **[15 pts]** Considere la integral

$$\int_{0}^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{1}{y^4+1}dydx.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [5 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

3. **[10 pts]** Calcule el área de la región R del primer cuadrante acotada por $y=4-x^2$, $y=3x$ y $y=0$.

---

4. **[15 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y)=e^{x^2}$$

sobre la región R : triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

Tiempo máximo: 90 minutos.

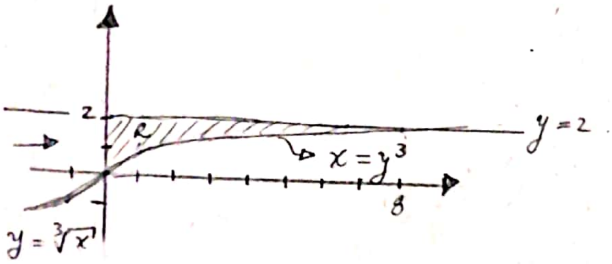
Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución Parcial III - 201930
fila A

1) $\int_{-2}^{3}\int_{0}^{2}(y^2-2xy)\,dy\,dx = \frac{10}{3}$

2)

ⓐ $R \overset{stv}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 8 \wedge \sqrt[3]{x}\le y\le 2\}$



ⓑ $R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le y^3 \wedge 0\le y\le 2\}$

$I := \int_0^2\int_0^{y^3}\frac{1}{y^4+1}\,dx\,dy$

ⓒ

$I = \int_0^2 \frac{1}{y^4+1}\left(x\Big|_0^{y^3}\right)dy$

$= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,dy$

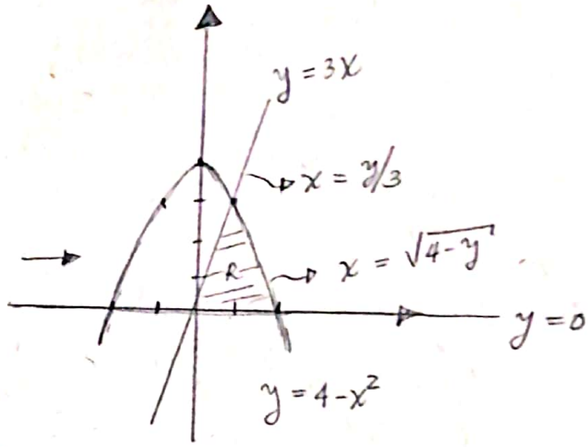
$u := y^4+1 \qquad \frac{du}{4} = y^3\,dy$

$y\to 2 \Rightarrow u\to 17$
$y\to 0 \qquad u\to 1$

$= \frac{1}{4}\int_1^{17}\frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln u\Big|_1^{17}$

$= \frac{1}{4}\ln 17.$

3)



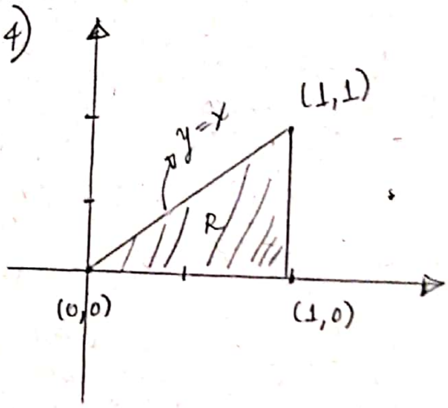
$R \overset{sth}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{3}\le x\le\sqrt{4-y} \wedge 0\le y\le 3\}$

$a(R) = \int_0^3\int_{y/3}^{\sqrt{4-y}} dx\,dy = 19/6$

ó

$a(R) = \int_0^1\int_0^{3x} dy\,dx + \int_1^2\int_0^{4-x^2} dy\,dx = \frac{3}{2}+\frac{5}{3} = \frac{19}{6}$

4)



i) $a(R) = \text{área } \Delta = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = 1/2$

ii) $\iint_R f(x,y)\,dA$

$\overset{stv}{=} \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \frac{e-1}{2}$

$\Rightarrow$ Valor promedio $= \frac{1}{1/2}\cdot\frac{e-1}{2} = e-1$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Tercer parcial de Cálculo III ANEC 201930
Fila B
Octubre 21 de 2019

Nombre completo:______________________________ Código:______________________________

1. **[10 pts]** Encuentre el valor de la integral

$$\int_{-2}^{3}\int_{0}^{2}\left(y^2-2xy\right)dxdy.$$

---

2. **[15 pts]** Considere la integral

$$\int_{0}^{1}\int_{\sqrt[3]{y}}^{1}\frac{1}{x^4+1}dxdy.$$

   (a) [5 pts] Trace la región de integración.
   (b) [5 pts] Invierta el orden de integración.
   (c) [5 pts] Evalúe la integral del inciso anterior.

---

3. **[10 pts]** Calcule el área de la región R del primer cuadrante acotada por $y=4-x^2$, $y=x+2$ y $y=0$.

---

4. **[15 pts]** Encuentre el valor promedio de la función

$$f(x,y)=e^{y^2}$$

sobre la región R : triángulo con vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$.

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

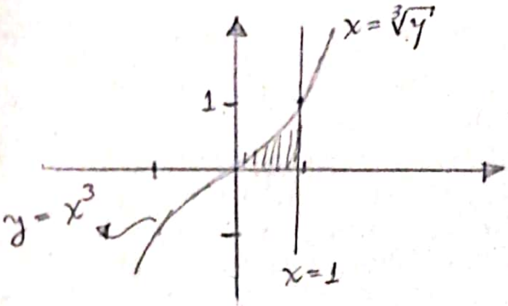
Solución Parcial III - 201930

fila B

1) $\displaystyle\int_{-2}^{3}\int_{0}^{2}(y^2-2xy)\,dx\,dy = \frac{40}{3}$

2)

ⓐ $R \overset{\text{sth}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt[3]{y}\le x\le 1 \wedge 0\le y\le 1\}$



ⓑ $R \overset{\text{sth}}{=} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \wedge 0\le y\le x^3\}$

$$I := \int_0^1\int_0^{x^3}\frac{1}{x^4+1}\,dy\,dx$$

ⓒ

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\left(y\Big|_0^{x^3}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$$

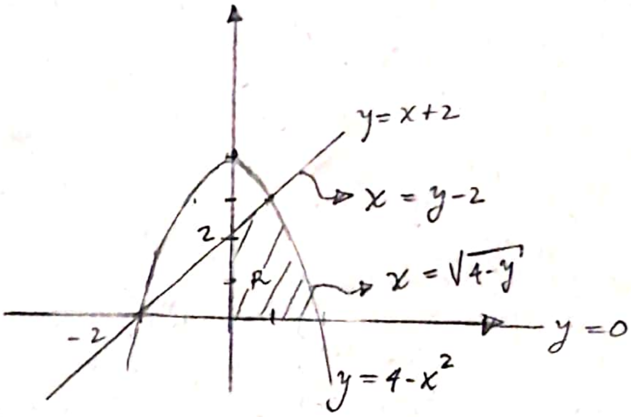
$u := x^4+1 \qquad \frac{du}{4} = x^3\,dx$

$x\to 1 \quad\Rightarrow\quad u\to 2$
$x\to 0 \qquad\quad u\to 1$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln u\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2.$$

3)



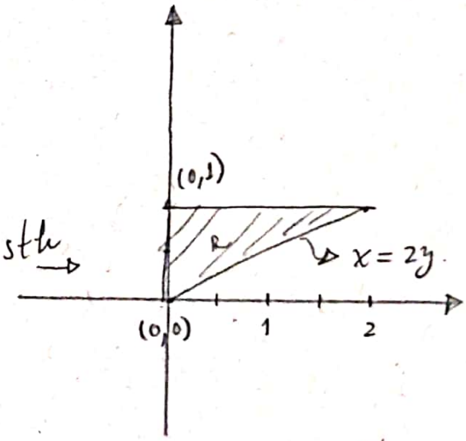
• $a(R) \overset{\text{sth}}{=} \displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y}}dx\,dy + \int_2^3\int_{y-2}^{\sqrt{4-y}}dx\,dy$

$$= \left(\frac{16}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)+\left(\frac{-7}{6}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{25}{6}$$

• $a(R) \overset{\text{sth}}{=} \displaystyle\int_0^1\int_0^{x+2}dy\,dx + \int_1^2\int_0^{4-x^2}dy\,dx = \frac{5}{2}+\frac{5}{3} = \frac{25}{6}$

4)

sth $\rightarrow$



i) $a(R) = \text{área } \Delta = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = 1.$

ii) $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$

$$\overset{\text{sth}}{=} \int_0^1\int_0^{2y} e^{y^2}\,dx\,dy = e-1.$$

$\rightarrow$ Valor promedio $= \dfrac{1}{1}\cdot(e-1) = e-1$