Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202210
Fila A
Junio 3 de 2022

Nombre completo:________________________ Código:________________________

1. **[10 pts]** Compruebe que la función $y = C_1x^2 + C_2x + \frac{1}{2}x^3 \ln x - \frac{3}{4}x^3$ es solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x.$$

Aquí C_1 y C_2 son constantes reales.

---

2. **[10 pts]** Determine la solución general de la ecuación de *variables separables*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^3+9)(2x+1)^5}{3y^2}.$$

---

3. **[15 pts]** David considera que necesitará $1’200.000 para retirarse. Si la tasa prevaleciente de interés en un fondo de retiro es 10% capitalizado continuamente, ¿de qué monto deben ser sus depósitos regulares anuales en el fondo para que pueda retirarse en 40 años?

---

4. **[5 pts]** Halle una función $M(x, y)$ tal que la ecuación dada a continuación sea exacta.

$$M(x,y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} + \ln y\right) dy = 0.$$

---

5. **[10 pts]** Resuelva la ecuación diferencial

$$\left(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4\right) dx + \left(20xy^3 - 6x^3y\right) dy = 0.$$

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario fila A

1) $x^2y''-2xy'+2y=x^3\ln x$

$y=C_1x^2+C_2x+\frac{1}{2}x^3\ln x-\frac{3}{4}x^3$

$y'=2C_1x+C_2+\frac{3}{2}x^2\ln x-\frac{7}{4}x^2$

$y''=2C_1+3x\ln x-2x$

Entonces,

$x^2y''-2xy'+2y$

$=\cancel{2C_1x^2}+\cancel{3x^3\ln x}-\cancel{2x^3}-\cancel{4C_1x^2}$

$-\cancel{2C_2x}-\cancel{3x^3\ln x}+\cancel{\frac{7}{2}x^3}$

$+\cancel{2C_1x^2}+\cancel{2C_2x}+x^3\ln x-\cancel{\frac{3}{2}x^3}$

$=x^3\ln x$

2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y^3+9)(2x+1)^5}{3y^2}$

$$\int\frac{3y^2}{(y^3+9)}dy=\int(2x+1)^5dx+C$$

$$\ln(y^3+9)=\frac{1}{12}(2x+1)^6+C.$$

3) Sea $V(t)$ el valor en el fondo de retiro después de t años.
Sea D los depósitos regulares.

$$\frac{dV}{dt}=0{,}1V+D\ ;\ V(40)=1'200.000$$
$$V(0)=0.$$

Paso 1.

$$\frac{dV}{dt}\underbrace{-0{,}1V}_{p(t)}=\underbrace{D}_{q(t)}.$$

Paso 2

$$I=e^{\int p(t)dt}=e^{\int -0{,}1\,dt}=e^{-0{,}1t}$$

Paso 3

$$\int I q(t)\,dt=\int e^{-0{,}1t}\cdot D\,dt=D\int e^{-0{,}1t}dt$$

$$=D\cdot\frac{1}{-0{,}1}e^{-0{,}1t}+C=-10De^{-0{,}1t}+C$$

Paso 4

$$V=\frac{1}{I}\left[\int I q(t)dt+C\right]$$

$$=\frac{1}{e^{-0{,}1t}}\left[-10De^{-0{,}1t}+C\right]$$

$$\Rightarrow V(t)=-10D+Ce^{0{,}1t}$$

Como $V(0)=0\Rightarrow C=10D$

Luego,

$$V(t)=-10D+10De^{0{,}1t}$$

Ahora,

$$1'200.000=V(40)$$
$$=10D(-1+e^{0{,}1\cdot 40})$$

$$\frac{1'200.000}{10(-1+e^4)}=D$$

$$\Rightarrow D\approx 2238{,}88.$$

4) $M(x,y)\,dx + \underbrace{\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4} + \ln y\right)}_{N} dy = 0.$

La ED es exacta si se cumple que

$$M_y = N_x$$

$$= -\frac{6x}{y^4} \Rightarrow M(x,y) = \int -6xy^{-4}\,dy + g(x)$$

$$= -\frac{6xy^{-3}}{-3} + g(x)$$

$$M(x,y) = \frac{2x}{y^3} + g(x)$$

5) $\underbrace{(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4)}_{M}dx + \underbrace{(20xy^3 - 6x^3y)}_{N}dy = 0$

$M_y = -18x^2y + 20y^3 \quad \wedge \quad N_x = 20y^3 - 18x^2y$

Como $M_y = N_x$ la ED es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$$\underset{(1)}{\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4} \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 20xy^3 - 6x^3y$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y) = 5xy^4 - 3x^3y^2 + g(x)$$

Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5y^4 - 9x^2y^2 + g'(x) \quad (2)$$

Por (1) y (2):

$$\cancel{5y^4} \cancel{- 9x^2y^2} + g'(x) = 5x^4 \cancel{- 9x^2y^2} \cancel{+ 5y^4}$$

$$\Rightarrow g(x) = x^5 + C$$

Luego,

$$f(x,y) = 5xy^4 - 3x^3y^2 + x^5 + C.$$

La solución general es

$$5xy^4 - 3x^3y^2 + x^5 = C.$$

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202210
Fila B
Junio 3 de 2022

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. [**10 pts**] Compruebe que la función $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} + \frac{3}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$ es solución de la ecuación diferencial
$$y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x.$$
Aquí C_1 y C_2 son constantes reales.

---

2. [**10 pts**] Determine la solución general de la ecuación de *variables separables*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-4y^3}\sqrt{3x-1}}{12y^2}.$$

---

3. [**15 pts**] David considera que necesitará \$1'600.000 para retirarse. Si la tasa prevaleciente de interés en un fondo de retiro es 4% capitalizado continuamente, ¿de qué monto deben ser sus depósitos regulares anuales en el fondo para que pueda retirarse en 36 años?

---

4. [**5 pts**] Halle una función $N(x, y)$ tal que la ecuación dada a continuación sea exacta.
$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4} + \ln x\right) dx + N(x, y)dy = 0.$$

---

5. [**10 pts**] Resuelva la ecuación diferencial
$$\left(20x^3y - 6xy^3\right) dx + \left(5x^4 - 9x^2y^2 + 5y^4\right) dy = 0.$$

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario fila B

1) $y''+6y'+8y = 3e^{-2x}+2x$

$$y = C_1e^{-2x}+C_2e^{-4x}+\frac{3}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{4}x-\frac{3}{16}$$

$$y' = -2C_1e^{-2x}-4C_2e^{-4x}-3xe^{-2x}+\frac{3}{2}e^{-2x}+\frac{1}{4}$$

$$y'' = 4C_1e^{-2x}+16C_2e^{-4x}+6xe^{-2x}-6e^{-2x}$$

Entonces,

$$y''+6y'+8y$$

$$=\cancel{4C_1e^{-2x}}+\cancel{16C_2e^{-4x}}+\cancel{6xe^{-2x}}-6e^{-2x}$$

$$-\cancel{12C_1e^{-2x}}-\cancel{24C_2e^{-4x}}-\cancel{18xe^{-2x}}+9e^{-2x}+3/2$$

$$+\cancel{8C_1e^{-2x}}+\cancel{8C_2e^{-4x}}+\cancel{12xe^{-2x}}+2x-3/2$$

$$= 3e^{-2x}+2x.$$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-4y^3}\sqrt{3x-1}}{12y^2}$$

$$\int 12y^2 e^{4y^3}\,dy = \int \sqrt{3x-1}\,dx$$

$$e^{4y^3} = \frac{2}{9}(3x-1)^{3/2}+C.$$

3) Sea $V(t)$ el valor en el fondo de retiro después de t años. Sea D los depósitos regulares.

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}04V + D; \quad V(36) = 1'600.000$$
$$V(0) = 0.$$

Paso 1

$$\frac{dV}{dt}\underbrace{-0{,}04}_{p(t)}V = \underbrace{D}_{q(t)}$$

Paso 2

$$I = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -0{,}04\,dt} = e^{-0{,}04t}$$

Paso 3

$$\int I q(t)\,dt = \int e^{-0{,}04t}\cdot D\,dt = D\int e^{-0{,}04t}\,dt$$

$$= D\cdot\frac{1}{-0{,}04}e^{-0{,}04t}+C = -25De^{-0{,}04t}+C.$$

Paso 4

$$V = \frac{1}{I}\left[\int Iq(t)\,dt + C\right]$$

$$= \frac{1}{e^{-0{,}04t}}\left[-25De^{-0{,}04t}+C\right]$$

$$\Rightarrow V(t) = -25D + Ce^{0{,}04t}$$

Como $V(0)=0 \Rightarrow C = 25D$.

Luego,

$$V(t) = -25D + 25De^{0{,}04t}$$

Ahora:

$$1'600.000 = V(36)$$
$$= 25D(-1+e^{0{,}04\cdot 36})$$

$$\frac{1'600.000}{25(-1+e^{1{,}44})} = D$$

$$\Rightarrow D \simeq 19871{,}48$$

4) $\underbrace{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3y^2}{x^4}+\ln x\right)}_{M}dx+N(x,y)dy=0$

la ED es exacta si se cumple que

$N_x = M_y$

$= \frac{-6y}{x^4} \Rightarrow N(x,y)=\int -6x^{-4}y\,dx + g(y)$

$= \frac{-6x^{-3}}{-3}y + g(y)$

$M(x,y) = \frac{2y}{x^3} + g(y)$

5) $\underbrace{(20x^3y-6xy^3)}_{M}dx + \underbrace{(5x^4-9x^2y^2+5y^4)}_{N}dy=0$

$M_y = 20x^3-18xy^2 \wedge N_x = 20x^3-18xy^2$

Como $M_y=N_x$ la ED es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = 20x^3y-6xy^3 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 5x^4-9x^2y^2+5y^4$ (1)

$\Downarrow$

$f(x,y) = 5x^4y-3x^2y^3+g(y)$

Entonces,

$\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^4-9x^2y^2+g'(y)$ (2)

Por (1) y (2):

$\cancel{5x^4}-9x^2y^2+g'(y)=\cancel{5x^4}-\cancel{9x^2y^2}+5y^4$

$g(y) = y^5+C$

luego,

$f(x,y) = 5x^4y-3x^2y^3+y^5+C$

La solución general es

$5x^4y-3x^2y^3+y^5=C.$