UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202230
Fila A
Noviembre 23 de 2022

Nombre completo:____________________ Código:____________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. [**10 pts**] Verifique que la función $y = C_1e^{5x} + C_2e^{3x} - 2xe^{3x}$ es la solución general de la siguiente ecuación diferencial
$$y'' - 8y' + 15y = 4e^{3x},$$
donde C_1 y C_2 son constantes cualesquiera.

---

2. [**10 pts**] Encuentre la solución particular de la ecuación de *variables separables*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+y^2)^{3/2}\ln x}{2xy}$$
que satisface la condición $y = \sqrt{3}$ cuando $x = 1$.

---

3. [**20 pts**] Fernando planea hacer un depósito inicial en una cuenta que gana 5% de interés anual, capitalizado continuamente, y luego hacer retiros de $8 000 por año. ¿Cuánto debe depositar si su cuenta tarda 10 años en agotarse?

---

4. [**10 pts**] Determine el valor de k para el cual la siguiente ecuación diferencial sea exacta.
$$\left(ky^2e^{4x} - \frac{y^2}{2x} - 3xy^4\right)dx + (8ye^{4x} - y\ln x - 6x^2y^3)dy = 0.$$

---

5. [**10 pts**] Resuelva la ecuación diferencial
$$\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx + (\ln x - 1)\,dy = 0.$$

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

① $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{3x} - 2xe^{3x}$

Tenemos,

$y' = 5C_1 e^{5x} + 3C_2 e^{3x} - 2e^{3x} - 6xe^{3x}$

$y'' = 25C_1 e^{5x} + 9C_2 e^{3x} - 12e^{3x} - 18xe^{3x}$

Por tanto,

$$y'' - 8y' + 15y$$
$$= \cancel{25C_1 e^{5x}} + \cancel{9C_2 e^{3x}} - 12e^{3x} \cancel{- 18xe^{3x}}$$
$$\cancel{- 40C_1 e^{5x}} \cancel{- 24C_2 e^{3x}} + 16e^{3x} \cancel{+ 48xe^{3x}}$$
$$\cancel{+ 15C_1 e^{5x}} \cancel{+ 15C_2 e^{3x}} \cancel{- 30xe^{3x}}$$
$$= 4e^{3x}.$$

② $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+y^2)^{3/2}\ln x}{2xy}$

$$\int \frac{2y}{(1+y^2)^{3/2}}\,dy = \int \frac{\ln x}{x}\,dx + C$$

$$\frac{-2}{(1+y^2)^{1/2}} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Cuando $y=\sqrt{3}$ y $x=1$, obtenemos que $C=-1$. La solución particular es

$$\frac{-2}{(1+y^2)^{1/2}} = \frac{(\ln x)^2}{2} - 1.$$

③ Sea $V(t)$ el valor en la cuenta después de t años, entonces

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}05V - 8000\ ; \quad V(10) = 0, \quad V(0) = ?$$

La solución general de la ED es

$$V(t) = 160000 + Ce^{0{,}05t}$$

Usando la condición $V(10)=0$, tenemos

$$C = -160.000\,e^{-0{,}5}$$

Entonces,

$$V(t) = 160000 - 160000\,e^{-0{,}5}\cdot e^{0{,}05t}$$

Luego,

$$V(0) = 160000 - 160000\,e^{-0{,}5} \approx 62955$$

④
$$\underbrace{\left(ky^2e^{4x} - \frac{y^2}{2x} - 3xy^4\right)}_{M}dx + \underbrace{\left(8ye^{4x} - y\ln x - 6x^2y^3\right)}_{N}dy = 0$$

La ED es exacta siempre que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (*)$$

• $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2kye^{4x} - \dfrac{y}{x} - 12xy^3$ • $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 32ye^{4x} - \dfrac{y}{x} - 12xy^3$ (**)

De (*) y (**), se sigue que $k = 16$.

⑤
$$\underbrace{\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)}_{M}dx + \underbrace{(\ln x - 1)}_{N}dy = 0$$

Nótese que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Dado que la ED es exacta existe $f(x,y)$ tal que

(*) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + \ln x + \dfrac{y}{x}$ $\wedge$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \ln x - 1$

$\Downarrow$ integrando con respecto a y

$$f(x,y) = y\ln x - y + g(x). \quad (**)$$

Por (*) y (**):

$$1 + \ln x + \frac{y}{x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + g'(x)$$

$$\Rightarrow 1 + \ln x = g'(x) \Rightarrow g(x) = \int (1+\ln x)\,dx + C = x\ln x + C$$

Por tanto,

$$f(x,y) = y\ln x - y + x\ln x + C$$

La solución general de la ED es

$$y\ln x - y + x\ln x = C.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202230
Fila B
Noviembre 23 de 2022

Nombre completo:______________________ Código:______________________

REALICE SÓLO CUATRO PUNTOS
EL TERCER EJERCICIO ES DE CARÁCTER OBLIGATORIO

1. [**10 pts**] Verifique que la función $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{3x} - 4xe^{6x}$ es la solución general de la siguiente ecuación diferencial
$$y'' - 9y' + 18y = -12e^{6x},$$
donde C_1 y C_2 son constantes cualesquiera.

---

2. [**10 pts**] Encuentre la solución particular de la ecuación de *variables separables*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{5+y^3}}{3y^2 e^{-x^2}}$$
que satisface la condición $y = -1$ cuando $x = 0$.

---

3. [**20 pts**] Fernando planea hacer un depósito inicial en una cuenta que gana 6% de interés anual, capitalizado continuamente, y luego hacer retiros de $3 000 por año. ¿Cuánto debe depositar si su cuenta tarda 8 años en agotarse?

---

4. [**10 pts**] Determine el valor de k para el cual la siguiente ecuación diferencial sea exacta.
$$\left(4x^2 e^y + x\ln y - 2y + \frac{x}{e^x \ln x}\right)dx + \left(\frac{4}{3}x^3 e^y + k\frac{x^2}{y} - 2x\right)dy = 0.$$

---

5. [**10 pts**] Resuelva la ecuación diferencial
$$(\ln y - 1)\,dx + \left(1 + \ln y + \frac{x}{y}\right)dy = 0.$$

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

① $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{3x} - 4x e^{6x}$

Tenemos,

$y' = 6C_1 e^{6x} + 3C_2 e^{3x} - 4e^{6x} - 24x e^{6x}$

$y'' = 36C_1 e^{6x} + 9C_2 e^{3x} - 48e^{6x} - 144x e^{6x}$

Por tanto,

$y'' - 9y' + 18y$

$= \cancel{36C_1 e^{6x}} + \cancel{9C_2 e^{3x}} - 48e^{6x} - \cancel{144x e^{6x}}$

$\cancel{-54C_1 e^{6x}} - \cancel{27C_2 e^{3x}} + 36e^{6x} \cancel{+216x e^{6x}}$

$\cancel{+18C_1 e^{6x}} + \cancel{18C_2 e^{3x}} \cancel{-72x e^{6x}}$

$= -12e^{6x}$.

② $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x\sqrt{5+y^3}}{3y^2 e^{-x^2}}$

$\displaystyle\int \frac{3y^2}{\sqrt{5+y^3}}\,dy = \int 2x e^{x^2}\,dx$

$2\sqrt{5+y^3} = e^{x^2} + C$

Cuando $y=-1$ y $x=0$, obtenemos que $C=3$. La solución particular es

$2\sqrt{5+y^3} = e^{x^2} + 3$.

③ Sea $V(t)$ el valor en la cuenta después de t años, entonces

$\dfrac{dV}{dt} = 0{,}06V - 3000$; $V(8) = 0$, $V(0) = ?$

La solución general de la ED es

$V(t) = 50.000 + C e^{0{,}06t}$

Usando la condición $V(8)=0$, tenemos

$C = -50.000\, e^{-0{,}48}$

Entonces

$V(t) = 50000 - 50000 e^{-0{,}48} \cdot e^{0{,}06t}$

Luego,

$V(0) = 50000 - 50000 e^{-0{,}48} \approx 19061$

④ $\underbrace{\left(4x^2e^y + x\ln y - 2y + \dfrac{x}{e^x \ln x}\right)}_{M} dx + \underbrace{\left(\dfrac{4}{3}x^3e^y + k\dfrac{x^2}{y} - 2x\right)}_{N} dy = 0$

La ED es exacta siempre que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ (*)

• $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4x^2e^y + \dfrac{x}{y} - 2$ • $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 4x^2e^y + 2k\dfrac{x}{y} - 2$ (**)

De (*) y (**), se sigue que $k = 1/2$.

⑤ $\underbrace{(\ln y - 1)}_{M} dx + \underbrace{\left(1 + \ln y + \dfrac{x}{y}\right)}_{N} dy = 0$

Nótese que $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Dado que la ED es exacta existe $f(x,y)$ tal que

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y - 1 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + \ln y + \dfrac{x}{y}$ (*)

$\Downarrow$ integrando con respecto a x

$f(x,y) = x\ln y - x + g(y)$ (**)

Por (*) y (**)

$1 + \ln y + \dfrac{x}{y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y} + g'(y)$

$\Rightarrow 1 + \ln y = g'(y) \Rightarrow g(y) = \int (1+\ln y)\,dy + C = y\ln y + C$

Por tanto,

$f(x,y) = x\ln y - x + y\ln y + C$

La solución general de la ED es

$x\ln y - x + y\ln y = C$.