Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202330
Fila A
Noviembre 24 de 2023

Nombre completo:__________________________________Código:______________________________

1. [**8 pts**] Compruebe que la función $y = C_1e^{6x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{7}e^{5x} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{36}$ es solución de la ecuación diferencial
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 12y = x + e^{5x}$$
para cualesquiera constantes reales C_1 y C_2.

---

2. [**10 pts**] Verifique que la siguiente ecuación diferencial es de *variables separables* y después determine su solución general.
$$\frac{xe^y}{y}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+1}{y}\right)^2.$$

---

3. [**15 pts**] Emperatriz guarda dinero en una cuenta de ahorros, ella hace depósitos regulares anuales de \$14 000. Si la tasa prevaleciente de interés permanece constante a 7% capitalizado continuamente, ¿cuánto tendrá ella en su cuenta dentro de 30 años?

---

4. [**10 pts**] Resuelva la ecuación diferencial
$$(3x^2y + e^y)dx + \left(x^3 + xe^y - 2y\right)dy = 0.$$

---

5. [**7 pts**] Halle la función $M(x, y)$ tal que la ecuación diferencial dada sea exacta.
$$M(x, y)dx + \left(xe^y + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

1) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{7} e^{5x} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{36}$

• $y' = 6C_1 e^{6x} - 2C_2 e^{-2x} - \frac{5}{7} e^{5x} - \frac{1}{12}$

• $y'' = 36C_1 e^{6x} + 4C_2 e^{-2x} - \frac{25}{7} e^{5x}$

Luego,

$y'' - 4y' - 12y$

$= \cancel{36C_1 e^{6x}} + 4\cancel{C_2 e^{-2x}} - \frac{25}{7} e^{5x}$

$\cancel{-24C_1 e^{6x}} + 8\cancel{C_2 e^{-2x}} + \frac{20}{7} e^{5x} + \cancel{\frac{1}{3}}$

$\cancel{-12C_1 e^{6x}} - 12\cancel{C_2 e^{-2x}} + \frac{12}{7} e^{5x} + x \cancel{- \frac{1}{3}} = e^{5x} + x.$

2) $\frac{xe^y}{y} \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+1}{y}\right)^2$

$\Rightarrow \int y e^y dy = \int \frac{(x+1)^2}{x} dx$

La solución general está dada por

$ye^y - e^y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x + C.$

3) Sea $V(t)$ el valor en la cuenta de Emperatriz después de t años, entonces

$\frac{dV}{dt} = 0{,}07V + 14000$; $V(0) = 0 \quad \wedge \quad V(30) = ?$

La solución general de la ED es

$V(t) = -200\,000 + Ce^{0{,}07t}$

Dado que $V(0) = 0$, entonces $C = 200\,000$.

Luego,

$V(t) = -200\,000 + 200\,000\, e^{0{,}07t}$

En 30 años, Emperatriz tendrá en su cuenta de ahorros

$V(30) \approx 1'433.234.$

4) $\underbrace{(3x^2y + e^y)}_{M} dx + \underbrace{(x^3 + xe^y - 2y)}_{N} dy = 0.$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + e^y \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + e^y$

$\Rightarrow$ la ED es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + e^y \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + xe^y - 2y$ (*)

$\Downarrow$ integrando

$f(x,y) = \int (3x^2y + e^y) dx + g(y)$

$= x^3y + xe^y + g(y).$ (**)

Por (*) y (**),

$\cancel{x^3 + xe^y} - 2y = \frac{\partial f}{\partial y}$

$= \cancel{x^3 + xe^y} + g'(y)$

$\Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + C.$

La solución general de la ED es

$x^3y + xe^y - y^2 = C.$

5) $M(x,y)dx + \underbrace{\left(xe^y + 2xy + \frac{1}{x}\right)}_{N} dy = 0.$

Sol

La ED es exacta si se cumple que

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$ (*)

• $\frac{\partial N}{\partial x} = e^y + 2y - \frac{1}{x^2}$

• Por (*):

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y + 2y - \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow M(x,y) = \int \left(e^y + 2y - \frac{1}{x^2}\right) dy + g(x)$

$= e^y + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x).$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202330
Fila B
Noviembre 24 de 2023

Nombre completo:____________________Código:____________________

1. [**8 pts**] Compruebe que la función $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{18}e^{3x} - \frac{1}{18}x + \frac{1}{108}$ es solución de la ecuación diferencial
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 18y = x + e^{3x}$$
para cualesquiera constantes reales C_1 y C_2.

---

2. [**10 pts**] Verifique que la siguiente ecuación diferencial es de *variables separables* y después determine su solución general.
$$\frac{y}{x}\ln y\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x+1}\right)^2.$$

---

3. [**15 pts**] Alejandrino guarda dinero en una cuenta de ahorros, ella hace depósitos regulares anuales de $18 000. Si la tasa prevaleciente de interés permanece constante a 6% capitalizado continuamente, ¿cuánto tendrá ella en su cuenta dentro de 35 años?

---

4. [**10 pts**] Resuelva la ecuación diferencial
$$(-2x + y^3 + ye^x)dx + \left(3xy^2 + e^x\right)dy = 0.$$

---

5. [**7 pts**] Halle la función $N(x, y)$ tal que la ecuación diferencial dada sea exacta.
$$\left(2xy + ye^x + \frac{1}{y}\right)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B.

1) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{18} e^{3x} - \frac{1}{18} x + \frac{1}{108}$

• $y' = 6C_1 e^{6x} - 3C_2 e^{-3x} - \frac{1}{6} e^{3x} - \frac{1}{18}$

• $y'' = 36 C_1 e^{6x} + 9 C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2} e^{3x}$

Luego,

$$y'' - 3y' - 18y$$

$$= \cancel{36 C_1 e^{6x}} + \cancel{9 C_2 e^{-3x}} - \cancel{\tfrac{1}{2} e^{3x}}$$

$$\cancel{-18 C_1 e^{6x}} + \cancel{9 C_2 e^{-3x}} + \cancel{\tfrac{1}{2} e^{3x}} + \cancel{\tfrac{1}{6}}$$

$$\cancel{-18 C_1 e^{6x}} \cancel{- 18 C_2 e^{-3x}} + e^{3x} + x \cancel{- \tfrac{1}{6}} = e^{3x} + x$$

2) $\frac{y}{x} \ln y \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x+1}\right)^2$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} \ln y \, dy = \int \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

La solución general está dada por

$$\frac{1}{2} \ln^2 y = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) + C$$

3) Sea $V(t)$ el valor en la cuenta de Alejandrino después de t años, entonces

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}06 V + 18000 \,; \quad V(0) = 0 \ \wedge \ V(35) = ?$$

La solución general de la ED es

$$V(t) = -300000 + C e^{0{,}06 t}$$

Dado que $V(0) = 0$, entonces $C = 300000$.

Luego,

$$V(t) = -300000 + 300000 e^{0{,}06 t}$$

En 35 años, Alejandrino tendrá en su cuenta de ahorros

$$V(35) \simeq 2'149.851$$

4) $\underbrace{(-2x + y^3 + ye^x)}_{M} dx + \underbrace{(3xy^2 + e^x)}_{N} dy = 0$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + e^x \ \wedge \ \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2 + e^x$$

$\Rightarrow$ la ED es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$$\underset{(*)}{\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + y^3 + ye^x} \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + e^x$$

$\Downarrow$ integrando

$$f(x,y) = \int (3xy^2 + e^x) dy + g(x)$$

$$= xy^3 + ye^x + g(x) \quad (**)$$

Por (*) y (**),

$$-2x + \cancel{y^3} + \cancel{ye^x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= \cancel{y^3} + \cancel{ye^x} + g'(x)$$

$\Rightarrow g'(x) = -2x \Rightarrow g(x) = -x^2 + C$

La solución general de la ED es

$$xy^3 + ye^x - x^2 = C.$$

5) $\underbrace{\left(2xy + ye^x + \frac{1}{y}\right)}_{M} dx + N(x,y) dy = 0$

Sol

La ED es exacta si se cumple que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (*)$$

• $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + e^x - \frac{1}{y^2}$

• Por (*):

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + e^x - \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow N(x,y) = \int \left(2x + e^x - \frac{1}{y^2}\right) dx + g(y)$$

$$= x^2 + e^x - \frac{x}{y^2} + g(y).$$