

Nombre completo: _____ Código: _____

1. [8 pts] Sean C_1 y C_2 constantes reales cualesquiera. Compruebe que la función

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-7x} - \frac{1}{9} e^{2x} - \frac{1}{21},$$

definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 21y = 1 + e^{2x}.$$

2. [12 pts] Responda los incisos (a), (b) y (c) dados a continuación, los cuales corresponden a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-1)^9}{2ye^{y^2}}.$$

- (a) [2 pts] Verifique que la ED es de variables separables.
(b) [6 pts] Determine la solución general de la ED.
(c) [4 pts] Escriba la solución particular implícita de la ED que satisface $y(1/3) = 1$.
-

3. [15 pts] Alexandra desea abrir una cuenta de ahorro que ofrece un interés del 6% anual capitalizado continuamente. Planea hacer un depósito inicial único y luego retirar \$10 000 por año de forma continua para cubrir sus gastos. ¿Cuánto debe depositar inicialmente si desea que el dinero dure 12 años?
-

4. [5 pts] Determine el valor de la constante α para que sea exacta la ecuación diferencial

$$\left(x^3 y + x e^x - x \ln y + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{1}{4} x^4 + \alpha \frac{x^2}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0.$$

5. [10 pts] Verifique que la ED

$$(3x^2 y + 2xy^2 + y^3) dx + (x^3 + 2x^2 y + 3xy^2) dy = 0$$

es exacta y después determine su solución.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución del Final

Cal III (ANEC) - 202510

Fila A

$$1) y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-7x} - \frac{1}{9} e^{2x} - \frac{1}{21}$$

$$y' = 3C_1 e^{3x} - 7C_2 e^{-7x} - \frac{2}{9} e^{2x}$$

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + 49C_2 e^{-7x} - \frac{4}{9} e^{2x}$$

Por tanto,

$$y'' + 4y' - 21y$$

$$= 9C_1 e^{3x} + 49C_2 e^{-7x} - \frac{4}{9} e^{2x}$$

$$+ 12C_1 e^{3x} - 28C_2 e^{-7x} - \frac{8}{9} e^{2x}$$

$$- 21C_1 e^{3x} - 21C_2 e^{-7x} + \frac{21}{9} e^{2x} + 1$$

$$= e^{2x} + 1$$

$$2) \frac{dy}{dx} = \frac{(3x-1)^9}{2ye^{y^2}}$$

$$\Rightarrow \int 2ye^{y^2} dy = \int (3x-1)^9 dx$$

$$e^{y^2} = \frac{1}{30} (3x-1)^{10} + C$$

Dado que $y=1$ cuando $x=1/3$, entonces $C=e$. La solución general de la ED es

$$e^{y^2} = \frac{1}{30} (3x-1)^{10} + e$$

3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta después de t años, entonces

$$\frac{dS}{dt} = 0,06S - 10000; S(12) = 0 \wedge S(0) = ?$$

La solución de la ED está dada por

$$S(t) = \frac{500.000}{3} + C e^{0,06t}$$

Dado que $S(12) = 0$, entonces

$$C = -\frac{500000}{3} e^{-0,72}$$

Por tanto,

$$S(t) = \frac{500.000}{3} - \frac{500.000}{3} e^{-0,72} e^{0,06t}$$

Luego,

$$S(0) = \frac{500000}{3} - \frac{500000}{3} e^{-0,72} \approx 85541,3$$

$$4) \underbrace{\left(x^3 y + x e^x - x \ln y + \frac{1}{y}\right)}_M dx + \underbrace{\left(\frac{1}{4} x^4 + \alpha \frac{x^2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)}_N dy = 0$$

La ED es exacta si se cumple que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^3 - \frac{x}{y} - \frac{1}{y^2} \wedge \frac{\partial N}{\partial x} = x^3 + 2\alpha \frac{x}{y} - \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = -1/2$$

$$5) \underbrace{(3x^2 y + 2xy^2 + y^3)}_M dx + \underbrace{(x^3 + 2x^2 y + 3xy^2)}_N dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 4xy + 3y^2 \wedge \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + 3y^2$$

$\Rightarrow$ la ED es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 2xy^2 + y^3 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2 y + 3xy^2$$

$\Downarrow$

$$f(x,y) = \int (3x^2 y + 2xy^2 + y^3) dx + g(y)$$

$$= x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + g(y)$$

Por (4),

$$x^3 + 2x^2 y + 3xy^2 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= x^3 + 2x^2 y + 3xy^2 + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C$$

La solución general de la ED es

$$x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 = C$$

Nombre completo: _____ Código: _____

1. [8 pts] Sean C_1 y C_2 constantes reales cualesquiera. Compruebe que la función

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5} e^{5x} - 4x,$$

definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = \frac{24}{5} e^{5x} + 24x - 4.$$

2. [12 pts] Responda los incisos (a), (b) y (c) dados a continuación, los cuales corresponden a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}e^{-\sqrt{y}}(5x-1)^6.$$

- (a) [2 pts] Verifique que la ED es de variables separables.
(b) [6 pts] Determine la solución general de la ED.
(c) [4 pts] Escriba la solución particular implícita de la ED que satisface $y(1/5) = 1$.
-

3. [15 pts] Camilo desea abrir una cuenta de ahorro que ofrece un interés del 5% anual, capitalizado continuamente. Planea hacer un depósito inicial único y luego retirar \$15 000 por año de forma continua para cubrir sus gastos. ¿Cuánto debe depositar inicialmente si desea que el dinero dure 10 años?
-

4. [5 pts] Determine el valor de la constante β para que sea exacta la ecuación diferencial

$$\left(\frac{1}{4}y^4 - \beta\frac{y^2}{x} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(xy^3 + ye^y + 6y\ln x + \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

5. [10 pts] Verifique que la ED

$$(y^3 + 2xy^2 + 3x^2y)dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2)dy = 0$$

es exacta y después determine su solución.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución del Final
Cal III (ANEC) - 202510

Fila B

Por tanto,

$$S(t) = 300000 - 300000 e^{-0,5} e^{0,05t}$$

luego,

$$S(0) = 300000 - 300000 e^{-0,5} \approx 118040,8.$$

$$4) \underbrace{\left(\frac{1}{4}y^4 - \beta \frac{y^2}{x} - \frac{y}{x^2}\right)}_M dx + \underbrace{\left(xy^3 + ye^y + 6y \ln x + \frac{1}{x}\right)}_N dy = 0$$

La ED es exacta si se cumple que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = y^3 - 2\beta \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} \wedge \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 + \frac{6y}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow -2\beta = 6 \Rightarrow \beta = -3.$$

$$5) \underbrace{(y^3 + 2xy^2 + 3x^2y)}_M dx + \underbrace{(x^3 + 2x^2y + 3xy^2)}_N dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 + 4xy + 3x^2 \wedge \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + 3y^2$$

$\Rightarrow$ La ED es exacta. Existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 + 2xy^2 + 3x^2y \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 \quad (*)$$

$\Downarrow$

$$f(x,y) = \int (y^3 + 2xy^2 + 3x^2y) dx + g(y) \\ = xy^3 + x^2y^2 + x^3y + g(y).$$

Por (*),

$$\cancel{x^3} + \cancel{2x^2y} + \cancel{3xy^2} = \frac{\partial f}{\partial y} \\ = \cancel{3xy^2} + \cancel{2x^2y} + \cancel{x^3} + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = C.$$

La solución general de la ED es.

$$xy^3 + x^2y^2 + x^3y = C.$$

$$1) y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5} e^{5x} - 4x$$

$$y' = -3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x} + e^{5x} - 4$$

$$y'' = 9C_1 e^{-3x} + 4C_2 e^{2x} + 5e^{5x}$$

Por tanto,

$$y'' + y' - 6y$$

$$= 9C_1 e^{-3x} + 4C_2 e^{2x} + 5e^{5x}$$

$$- 3C_1 e^{-3x} + 2C_2 e^{2x} + e^{5x} - 4$$

$$- 6C_1 e^{-3x} - 6C_2 e^{2x} - \frac{6}{5} e^{5x} + 24x.$$

$$= \frac{24}{5} e^{5x} + 24x - 4.$$

$$2) \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} e^{-\sqrt{y}} (5x-1)^6$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{\sqrt{y}} dy = \int (5x-1)^6 dx$$

$$e^{\sqrt{y}} = \frac{1}{35} (5x-1)^7 + C.$$

Dado que $y=1$ cuando $x=\frac{1}{5}$, entonces $C=e$. La solución general de la ED es

$$e^{\sqrt{y}} = \frac{1}{35} (5x-1)^7 + e.$$

3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta después de t años, entonces

$$\frac{dS}{dt} = 0,05S - 15000; S(10) = 0 \wedge S(0) = ?$$

La solución de la ED está dada por

$$S(t) = 300000 + Ce^{0,05t}$$

Dado que $S(10) = 0$, entonces

$$C = -300000 e^{-0,5}$$