UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202530
Fila A
Diciembre 3 de 2025

Nombre completo:________________________ Código:________________________

1. **[8 pts]** Sean C_1 y C_2 constantes reales cualesquiera. Compruebe que la función

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + e^{4x} + 5,$$

definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 14e^{4x} - 30.$$

---

2. **[10 pts]** Verifique que la ED dada es separable y después determine su solución general.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2e^x}{2y(y^2-1)^3}.$$

---

3. **[20 pts]** Fabiola está planeando abrir un emprendimiento propio, pero desea dedicar un tiempo a capacitarse y tomar cursos antes de iniciar formalmente. Este periodo no tiene una duración fija; terminará cuando se agote el fondo que ha reservado. Fabiola deposita \$15 000 en una cuenta que gana interés a una tasa del 5% anual, capitalizado continuamente. Durante el tiempo de capacitación, planea retirar \$8 000 por año para pagar cursos, materiales y transporte.

   (a) [5 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial que describa el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.

   (b) [15 pts] ¿Durante cuántos años podrá Fabiola sostener estos gastos antes de que la cuenta se agote?

---

4. **[12 pts]** Resuelva la ecuación diferencial

$$(3x + 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

   (a) [2 pts] Demuestre que la ED no es exacta.

   (b) [3 pts] Verifique que un factor integrante para la ED es $\mu(x) = x$.

   (c) [7 pts] Determine la solución general de la ED.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Fila A

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} + e^{4x} + 5$

$y' = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x} + 4e^{4x}$

$y'' = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{-3x} + 16 e^{4x}$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
&y'' + y' - 6y \\
&= \cancel{4c_1 e^{2x}} + \cancel{9c_2 e^{-3x}} + 16 e^{4x} \\
&\quad + \cancel{2c_1 e^{2x}} - \cancel{3c_2 e^{-3x}} + 4e^{4x} \\
&\quad - \cancel{6c_1 e^{2x}} - \cancel{6c_2 e^{-3x}} - 6e^{4x} - 30 \\
&= 14e^{4x} - 30
\end{aligned}
$$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 e^x}{2y(y^2-1)^3}$

$\Rightarrow \int 2y(y^2-1)^3\,dy = \int x^2 e^x\,dx$

$\frac{1}{4}(y^2-1)^4 = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta de Fabiola después de t años.

$\dfrac{dS}{dt} = 0{,}05S - 8000$; $S(0) = 15000$

$t = ?$ para que $S(t) = 0$.

En consecuencia, el saldo está dado por

$S(t) = 160000 - 145000\, e^{0{,}05t}$.

Resolvamos la ecuación

$$S(t) = 0,$$

esto es,

$$160000 - 145000\, e^{0{,}05t} = 0$$

$\Rightarrow t \approx 1{,}96$ años

4) $\underbrace{(3x+2y^2)}_{M}dx + \underbrace{2xy}_{N}dy = 0 \quad (*_1)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4y \ \wedge\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$

Por tanto, la ED no es exacta. Ahora bien,

$\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{4y-2y}{2xy} = \dfrac{2y}{2xy} = \dfrac{1}{x}.$

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x.$

Multiplicando la ED por $\mu(x)$,

$\underbrace{(3x^2+2xy^2)}_{M^*}dx + \underbrace{2x^2y}_{N^*}dy = 0 \quad (*_2)$

$\dfrac{\partial M^*}{\partial y} = 4xy \ \wedge\ \dfrac{\partial N^*}{\partial x} = 4xy$

$\Rightarrow (*_2)$ es exacta. La solución general de la ED $(*_1)$ está dada por

$$x^3 + x^2y^2 = C.$$

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202530
Fila B
Diciembre 3 de 2025

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[8 pts]** Sean C_1 y C_2 constantes reales cualesquiera. Compruebe que la función

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} + 2e^{3x} + 7,$$

definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$, es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 28e^{3x} - 28.$$

---

2. **[10 pts]** Verifique que la ED dada es separable y después determine su solución general.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x^3+1)^4}{y^2 e^{y}}.$$

---

3. **[20 pts]** Dylan planea tomar un curso de especialización en el extranjero. Para financiar su estadía, abre una cuenta de ahorro antes de iniciar el curso. Dylan deposita \$18 000 en una cuenta que gana interés a una tasa del 4% anual, capitalizado continuamente. Durante su estancia, planea retirar \$7 000 por año para cubrir alojamiento, comida y transporte.

   (a) [5 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial que describa el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.

   (b) [15 pts] Determine cuánto tiempo podrá Dylan mantenerse con este fondo antes de que se agote la cuenta.

---

4. **[12 pts]** Resuelva la ecuación diferencial

$$3xy\,dx + (3x^2 + 4y)\,dy = 0.$$

   (a) [2 pts] Demuestre que la ED no es exacta.

   (b) [3 pts] Verifique que un factor integrante para la ED es $\mu(y) = y$.

   (c) [7 pts] Determine la solución general de la ED.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario Fila B

1) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-4x} + 2e^{3x} + 7.$

$y' = C_1e^{x} - 4C_2e^{-4x} + 6e^{3x}$

$y'' = C_1e^{x} + 16C_2e^{-4x} + 18e^{3x}$

Entonces,

$y'' + 3y' - 4y$

$= \cancel{C_1e^{x}} + \cancel{16C_2e^{-4x}} + 18e^{3x}$

$+ \cancel{3C_1e^{x}} - \cancel{12C_2e^{-4x}} + 18e^{3x}$

$- \cancel{4C_1e^{x}} - \cancel{4C_2e^{-4x}} - 8e^{3x} - 28$

$= 28e^{3x} - 28.$

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x^3+1)^4}{y^2e^y}$$

$$\Rightarrow \int y^2e^y\,dy = \int 3x^2(x^3+1)^4\,dx$$

$$y^2e^y - 2ye^y + 2e^y = \frac{1}{5}(x^3+1)^5 + C.$$

3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta de Dylan después de t años.

$\frac{dS}{dt} = 0{,}04S - 7000$; $S(0) = 18000$

$t = ?$ para que $S(t) = 0$.

En consecuencia, el saldo está dado por

$$S(t) = 175000 - 157000e^{0{,}04t}.$$

Resolvamos la ecuación

$$S(t) = 0,$$

esto es,

$$175000 - 157000e^{0{,}04t} = 0$$

$\Rightarrow t \approx 2{,}71$ años

4) $\underbrace{3xy}_{M}\,dx + \underbrace{(3x^2 + 4y)}_{N}\,dy = 0 \quad (*_1)$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x \;\wedge\; \frac{\partial N}{\partial x} = 6x$

Por tanto, la ED no es exacta. Ahora bien,

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{6x - 3x}{M} = \frac{3x}{3xy} = \frac{1}{y}.$$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln y} = y$$

Multiplicando la ED por $\mu(y)$,

$\underbrace{3xy^2}_{M^*}\,dx + \underbrace{(3x^2y + 4y^2)}_{N^*}\,dy = 0 \quad (*_2)$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = 6xy \;\wedge\; \frac{\partial N^*}{\partial x} = 6xy$

$\Rightarrow (*_2)$ es exacta. La solución general de la ED $(*_1)$ está dada por

$$\frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C.$$