Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202610
Fila A
Mayo 26 de 2026

Nombre completo:________________________________Código:________________________________

1. **[8 pts]** Verifique que la función
$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x} + \tfrac{1}{16}e^{4x}$$
es solución de la ecuación diferencial
$$y'' - 16y = 0,$$
donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias.

---

2. **[12 pts]** Responda los incisos (a), (b) y (c) dados a continuación, los cuales corresponden a la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{x^3-y}.$$
   (a) [2 pts] Verifique que la ED es de variables separables.
   (b) [6 pts] Determine la solución general explícita de la ED.
   (c) [4 pts] Escriba la solución particular de la ED tal que $y(0) = 1$.

---

3. **[15 pts]** María desea acumular \$950.000 para su jubilación dentro de 35 años. El fondo de retiro ofrece una tasa de interés del 8% anual capitalizado continuamente. Si ella realiza depósitos continuos y constantes en el fondo, ¿qué monto anual debe efectuar para alcanzar su meta?

---

4. **[5 pts]** Halle todas las funciones $M(x, y)$ tales que la ecuación diferencial dada sea exacta.
$$M(x, y)dx + (e^x + x^2 + 2y)dy = 0.$$

---

5. **[10 pts]** Considere la ecuación diferencial
$$(5 - x^2 - y^2)\, dx + (xy + y)\, dy = 0.$$
   (a) [4 pts] Determine un factor integrante para la ED.
   (b) [6 pts] Multiplique la ED por el factor integrante y verifique que esta “nueva” ED es exacta.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Fila A

1) $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{16} e^{4x}$

$y' = 4c_1 e^{4x} - 4c_2 e^{-4x} + \frac{1}{4} e^{4x}$

$y'' = 16 c_1 e^{4x} + 16 c_2 e^{-4x} + e^{4x}$

Por consiguiente,

$y'' - 16y$

$= 16 c_1 e^{4x} + 16 c_2 e^{-4x} + e^{4x}$

$- 16 c_1 e^{4x} - 16 c_2 e^{-4x} - e^{4x}$

$= 0.$

2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{x^3 - y}$

$\Rightarrow \int e^y dy = \int 3x^2 e^{x^3} dx \Rightarrow e^y = e^{x^3} + C$

$y = \ln(e^{x^3} + c).$

Debido a que $y(0) = 1$, entonces $c = e - 1$.
La solución particular de la ED es

$y = \ln(e^{x^3} + e - 1)$

3) Sea $V(t)$ el valor en el fondo de retiro después de t años.

$\frac{dv}{dt} = 0{,}08V + D$; $V(0) = 0$; $V(35) = 950\,000$; $D = ?$

Tenemos,

$V(t) = -\frac{25}{2} D + C e^{0{,}08t}$

Como $V(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{25}{2} D$. Luego,

$V(t) = -\frac{25}{2} D + \frac{25}{2} D e^{0{,}08t}$

Ahora bien,

$950\,000 = V(35)$

$= \frac{25}{2} D(-1 + e^{2{,}8})$

$\Rightarrow D = \frac{2 \cdot 950\,000}{25(-1 + e^{2{,}8})}$

$\approx 4920{,}8$

4) $M(x,y)\,dx + (\underbrace{e^x + x^2 + 2y}_{N})\,dy = 0$

La ED es exacta si

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$

esto es

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x + 2x.$

Luego, $M(x,y) = y e^x + 2xy + g(x).$

5) $\underbrace{(5 - x^2 - y^2)}_{M}\,dx + \underbrace{(xy + y)}_{N}\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y$

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2y - y}{xy + y} = \frac{-3y}{y(x+1)} = \frac{-3}{x+1}$

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{-3\ln(x+1)} = (x+1)^{-3}.$

Multiplicando la ED por $\mu(x)$, obtenemos

$\underbrace{(5 - x^2 - y^2)(x+1)^{-3}}_{M^*}\,dx + \underbrace{(xy + y)(x+1)^{-3}}_{N^*}\,dy = 0 \quad (*_1)$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = -2y(x+1)^{-3} \quad (*_2)$

Y,

$\frac{\partial N^*}{\partial x} = y(x+1)^{-3} + (xy + y) \cdot -3(x+1)^{-4}$

$= \frac{y}{(x+1)^3} - \frac{3xy + 3y}{(x+1)^4}$

$= \frac{xy + y - 3xy - 3y}{(x+1)^4}$

$= \frac{-2xy - 2y}{(x+1)^4} = \frac{-2y(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2y}{(x+1)^3} \quad (*_3)$

Por $(*_2)$ y $(*_3)$, la ED $(*_1)$ es exacta.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 202610
Fila B
Mayo 26 de 2026

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[8 pts]** Verifique que la función
$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \tfrac{1}{9}e^{3x}$$
es solución de la ecuación diferencial
$$y'' - 9y = 0,$$
donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias.

---

2. **[12 pts]** Responda los incisos (a), (b) y (c) dados a continuación, los cuales corresponden a la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2-y}.$$
   (a) [2 pts] Verifique que la ED es de variables separables.
   (b) [6 pts] Determine la solución general explícita de la ED.
   (c) [4 pts] Escriba la solución particular de la ED tal que $y(0) = 1$.

---

3. **[15 pts]** Ana desea acumular \$2'000.000 para su jubilación dentro de 25 años. El fondo de retiro ofrece una tasa de interés del 5% anual capitalizado continuamente. Si ella realiza depósitos continuos y constantes en el fondo, ¿qué monto anual debe efectuar para alcanzar su meta?

---

4. **[5 pts]** Halle todas las funciones $N(x, y)$ tales que la ecuación diferencial dada sea exacta.
$$(2x + y^2 + e^y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

---

5. **[10 pts]** Considere la ecuación diferencial
$$(xy + x)\,dx + (5 - x^2 - y^2)\,dy = 0.$$
   (a) [4 pts] Determine un factor integrante para la ED.
   (b) [6 pts] Multiplique la ED por el factor integrante y verifique que esta "nueva" ED es exacta.

Tiempo máximo: 100 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

1) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{9} e^{3x}$

$y' = 3C_1 e^{3x} - 3C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3} e^{3x}$

$y'' = 9C_1 e^{3x} + 9C_2 e^{-3x} + e^{3x}$

Por consiguiente,

$y'' - 9y$

$= 9C_1 e^{3x} + 9C_2 e^{-3x} + e^{3x}$

$\quad -9C_1 e^{3x} - 9C_2 e^{-3x} - e^{3x}$

$= 0$

2) $\frac{dy}{dx} = 2x e^{x^2 - y}$

$\Rightarrow \int e^y dy = \int 2x e^{x^2} dx \Rightarrow e^y = e^{x^2} + C$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

Debido a que $y(0) = 1$, entonces $C = e - 1$

La solución particular de la ED es

$$y = \ln(e^{x^2} + e - 1).$$

3) Sea $V(t)$ el valor en el fondo de retiro después de t años.

$\frac{dV}{dt} = 0{,}05V + D$; $V(0) = 0$; $V(25) = 2'000.000$; $D = ?$

Tenemos,

$V(t) = -20D + Ce^{0{,}05t}$

Como $V(0) = 0 \Rightarrow C = 20D$. Luego,

$V(t) = -20D + 20De^{0{,}05t}$

Ahora bien,

$2'000.000 = V(25)$

$\quad = 20D(-1 + e^{1{,}25})$

$\Rightarrow D = \frac{2'000.000}{20(-1 + e^{1{,}25})}$

$\approx 40155{,}11$

4) $\underbrace{(2x + y^2 + e^y)}_{M} dx + N(x,y)\, dy = 0$

La ED es exacta si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y},$$

esto es

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y + e^y.$$

Luego,

$$N(x,y) = 2xy + xe^y + g(y).$$

5) $\underbrace{(xy + x)}_{M} dx + \underbrace{(5 - x^2 - y^2)}_{N} dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = x \quad \wedge \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$

$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-2x - x}{xy + x} = \frac{-3x}{x(y+1)} = \frac{-3}{y+1}$

$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy} = e^{-3\ln(y+1)} = (y+1)^{-3}.$

Multiplicando la ED por $\mu(y)$, obtenemos

$\underbrace{(xy + x)(y+1)^{-3}}_{M^*} dx + \underbrace{(5 - x^2 - y^2)(y+1)^{-3}}_{N^*} dy = 0 \quad (*_1)$

$\frac{\partial M^*}{\partial y} = x(y+1)^{-3} + (xy + x) \cdot -3(y+1)^{-4}$

$= \frac{x}{(y+1)^3} - \frac{3xy + 3x}{(y+1)^4}$

$= \frac{xy + x - 3xy - 3x}{(y+1)^4}$

$= \frac{-2xy - 2x}{(y+1)^4} = \frac{-2x(y+1)}{(y+1)^4} = \frac{-2x}{(y+1)^3} \quad (*_2)$

Y,

$\frac{\partial N^*}{\partial x} = -2x(y+1)^{-3} \quad (*_3).$

Por $(*_2)$ y $(*_3)$, la ED $(*_1)$ es exacta.