UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 201910
Fila A
Mayo 18 de 2019

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[10 pts]** Verifique que $y = 2 + \ln x + C_1 x + C_2 x \ln x$ es solución de la ecuación diferencial

$$x^2 y'' - xy' + y = \ln x.$$

---

2. **[10 pts]** Encuentre la solución particular de la ecuación de *variables separables*

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-y+x^2}$$

que satisface la condición $y = 0$ cuando $x = 1$.

---

3. **[15 pts]** Alejandro está ahorrando para comprar una casa que costará 70 000 euros dentro de 5 años. Sus padres desean ayudar haciendo un depósito total de A euros en una cuenta de ahorros que gana 8% de interés anual, capitalizado continuamente. Alejandro planea sumar a esta cantidad haciendo depósitos frecuentes en la cuenta que totalicen 7 000 euros por año. ¿Cuál debe ser A para que él cumpla su objetivo?

---

4. **[15 pts]** Resuelva la ecuación diferencial

$$(6x^3 y + 3y^2)dx + \left(x^4 + 2xy\right) dy = 0.$$

   (a) [3 pts] Demuestre que la ED no es exacta.

   (b) [4 pts] Verifique que un factor integrante para la ED es $\mu(x) = x^2$.

   (c) [8 pts] Determine la solución general de la ED.

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario
Parcial Final – Fila A

1) $y = 2 + \ln x + C_1 x + C_2 x \ln x$

$y' = \frac{1}{x} + C_1 + C_2 \ln x + C_2$

$y'' = \frac{-1}{x^2} + \frac{C_2}{x}$

Entonces,

$x^2 y'' - x y' + y$

$= \cancel{-1} + C_2 x \cancel{-1} \cancel{- C_1 x} \cancel{- C_2 x \ln x} - C_2 x$

$\cancel{+ 2} + \ln x \cancel{+ C_1 x} \cancel{+ C_2 x \ln x}$

$= \ln x$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x e^{x^2}}{e^y}$

$\int e^y dy = \int x e^{x^2} dx$

$e^y = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

Si $y = 0$ cuando $x = 1$, entonces

$1 = \frac{1}{2} e + c \Rightarrow c = 1 - \frac{1}{2} e$

La solución particular es

$e^y = \frac{1}{2} e^{x^2} + 1 - \frac{1}{2} e$

3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta de ahorros después de t años, entonces

$S(5) = 70000$

$\frac{dS}{dt} = 0{,}08\, S + 7000 \; ; \; S(0) = A.$

Paso 1 Forma estándar

$\underbrace{\frac{dS}{dt} - 0{,}08}_{p(t)} S = \underbrace{7000}_{q(t)}$

Paso 2 Factor integrante

$I = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -0{,}08 dt} = e^{-0{,}08t}$

Paso 3 Resolver la integral

$\int I q(t) dt = \int e^{-0{,}08t} \cdot 7000 = -87500\, e^{-0{,}08t}$

Paso 4 Solución general

$S(t) = \frac{1}{e^{-0{,}08t}} \left[-87500\, e^{-0{,}08t} + c \right]$

$= -87500 + c\, e^{0{,}08t}$

Como $S(5) = 70000$, entonces

$70000 = S(5) = -87500 + c\, e^{0{,}4}$

$\Rightarrow c = 157500\, e^{-0{,}4}$

Por tanto,

$S(t) = -87500 + 157500\, e^{-0{,}4} e^{0{,}08t}$

Luego,

$A = S(0) = -87500 + 157500\, e^{-0{,}4} \approx 18075{,}40$

4) $\underbrace{(6x^3 y + 3y^2)}_{M} dx + \underbrace{(x^4 + 2xy)}_{N} dy = 0$

Sol:

a) $M_y = 6x^3 + 6y \;\wedge\; N_x = 4x^3 + 2y$

La ED no es exacta.

b) $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{6x^3 + 6y - 4x^3 - 2y}{x^4 + 2xy}$

$= \frac{2x^3 + 4y}{x^4 + 2xy} = \frac{2(x^3 + 2y)}{x(x^3 + 2y)} = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$

c) Multiplicando la ED por el factor integrante, obtenemos

$$\underbrace{(6x^5y+3x^2y^2)}_{M^*}dx+\underbrace{(x^6+2x^3y)}_{N^*}dy=0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y}=6x^5+6x^2y \quad \wedge \quad \frac{\partial N^*}{\partial x}=6x^5+6x^2y$$

$\rightarrow$ Existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^5y+3x^2y^2 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^6+2x^3y$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y)=\int(6x^5y+3x^2y^2)dx+g(y).$$

$$\Rightarrow f(x,y)=x^6y+x^3y^2+g(y).$$

Por tanto,

$$x^6+2x^3y=\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$=x^6+2x^3y+g'(y)$$

$\Rightarrow g'(y)=0$ y así $g(y)=C$.

La solución general es

$$x^6y+x^3y^2=C.$$

Scanned by CamScanner

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 201910
Fila B
Mayo 18 de 2019

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[10 pts]** Verifique que $y = C_1x + C_2x\ln x + 2 + \ln x$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x^2}.$$

---

2. **[10 pts]** Encuentre la solución particular de la ecuación de *variables separables*

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-2y+x^3}$$

que satisface la condición $y = 0$ cuando $x = 1$.

---

3. **[15 pts]** Alejandra está ahorrando para comprar una casa que costará 80 000 euros dentro de 6 años. Sus padres desean ayudar haciendo un depósito total de A euros en una cuenta de ahorros que gana 5% de interés anual, capitalizado continuamente. Alejandra planea sumar a esta cantidad haciendo depósitos frecuentes en la cuenta que totalicen 8 000 euros por año. ¿Cuál debe ser A para que ella cumpla su objetivo?

---

4. **[15 pts]** Resuelva la ecuación diferencial

$$(2xy + y^4)dx + \left(3x^2 + 6xy^3\right)dy = 0.$$

   (a) [3 pts] Demuestre que la ED no es exacta.
   (b) [4 pts] Verifique que un factor integrante para la ED es $\mu(y) = y^2$.
   (c) [8 pts] Determine la solución general de la ED.

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solucionario
Parcial Final - Fila B

1) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + 2 + \ln x$

$y' = C_1 + C_2 \ln x + C_2 + \frac{1}{x}$

$y'' = \frac{C_2}{x} - \frac{1}{x^2}$

Entonces

$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y$

$= \frac{C_2}{x} \cancel{- \frac{1}{x^2}} - \frac{C_1}{x} - \frac{C_2 \ln x}{x} - \frac{C_2}{x} \cancel{- \frac{1}{x^2}}$

$+ \frac{C_1}{x} + \cancel{\frac{C_2 \ln x}{x}} + \cancel{\frac{2}{x^2}} + \frac{\ln x}{x^2}$.

$= \frac{\ln x}{x^2}$.

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 e^{x^3}}{e^{2y}}$

$\int e^{2y} dy = \int 3x^2 e^{x^3} dx$

$\frac{1}{2} e^{2y} = e^{x^3} + C$

si $y = 0$ cuando $x = 1$, entonces

$\frac{1}{2} = e + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} - e$

La solución particular es

$\frac{1}{2} e^{2y} = e^{x^3} + \frac{1}{2} - e$

3) Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta de ahorro después de t años, entonces $S(6) = 80000$

$\frac{dS}{dt} = 0{,}05 S + 8000$; $S(0) = A$

Paso 1 Forma estándar

$\frac{dS}{dt} \underbrace{- 0{,}05}_{p(t)} S = \underbrace{8000}_{q(t)}$

Paso 2 Factor integrante

$I = e^{\int p(t) dt} = e^{\int -0{,}05 dt} = e^{-0{,}05t}$

Paso 3. Resolver la integral

$\int I q(t) dt = \int e^{-0{,}05t} \cdot 8000 dt = -160000 e^{-0{,}05t}$

Paso 4 Solución general

$S(t) = \frac{1}{e^{-0{,}05t}} \left[-160000 e^{-0{,}05t} + C \right]$

$= -160000 + C e^{0{,}05t}$

Como $S(6) = 80000$, entonces

$80000 = S(6) = -160000 + C e^{0{,}3}$

$\Rightarrow C = 240000 e^{-0{,}3}$

Por tanto,

$S(t) = -160000 + 240000 e^{-0{,}3} e^{0{,}05t}$

Luego,

$A = S(0) = -160000 + 240000 e^{-0{,}3} \approx 17796{,}37$

4) $\underbrace{(2xy + y^4)}_{M} dx + \underbrace{(3x^2 + 6xy^3)}_{N} dy = 0$

Sol:

a) $M_y = 2x + 4y^3 \wedge N_x = 6x + 6y^3$

La ED no es exacta.

b) $\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{6x + 6y^3 - 2x - 4y^3}{2xy + y^4}$

$= \frac{4x + 2y^3}{2xy + y^4} = \frac{2(2x + y^3)}{y(2x + y^3)} = \frac{2}{y}$

$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = y^2$

c) Multiplicando la ED por el factor integrante, obtenemos

$$\underbrace{(2xy^3+y^6)}_{M^*}dx+\underbrace{(3x^2y^2+6xy^5)}_{N^*}dy=0$$

$$\frac{\partial M^*}{\partial y}=6xy^2+6y^5 \ \wedge \ \frac{\partial N^*}{\partial x}=6xy^2+6y^5$$

$\Longrightarrow$ Existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3+y^6 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2+6xy^5$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y)=\int(2xy^3+y^6)\,dx+g(y)$$

$$\Longrightarrow f(x,y)=x^2y^3+xy^6+g(y).$$

Por tanto,

$$3x^2y^2+6xy^5=\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=3x^2y^2+6xy^5+g'(y)$$

$\Longrightarrow g'(y)=0$ y así $g(y)=C$.

La solución general es

$$x^2y^3+xy^6=C.$$

Scanned by CamScanner