Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 201930
Fila A
Noviembre 26 de 2019

Nombre completo:____________________ Código:____________________

1. **[10 pts]** Compruebe que la función $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ es solución de la ecuación diferencial

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x.$$

Aquí C_1, C_2 y C_3 son constantes reales.

---

2. **[10 pts]** Determine la solución general de la ecuación de *variables separables*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{te^y}{2t-1}.$$

---

3. **[15 pts]** Alonzo planea hacer un depósito inicial en una cuenta de ahorros que gana 5% de interés anual, capitalizado continuamente, y luego hacer retiros de $5 000 por año.

(a) [10 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.

(b) [5 pts] ¿Cuánto debe depositar si su cuenta tarda 10 años en agotarse?

---

4. **[15 pts]** Resuelva la ecuación diferencial

$$xydx + \left(2x^2 + 3y^2 - 20\right)dy = 0.$$

(a) [3 pts] Demuestre que la ED no es exacta.

(b) [4 pts] Verifique que un factor integrante para la ED es $\mu(y) = y^3$.

(c) [8 pts] Determine la solución general de la ED.

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila A

① $y' = C_1e^{x} + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x} - \frac{1}{2}$

$y'' = C_1e^{x} + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x}$

$y''' = C_1e^{x} + 8C_2e^{2x} + 27C_3e^{3x}$

Entonces,

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y$

$= \cancel{C_1e^{x}} + 8C_2e^{2x} + \cancel{27C_3e^{3x}}$

$\cancel{-6C_1e^{x}} - 24C_2e^{2x} - \cancel{54C_3e^{3x}}$

$\cancel{+11C_1e^{x}} + 22C_2e^{2x} + \cancel{33C_3e^{3x}} - \frac{11}{2}$

$\cancel{-6C_1e^{x}} - 6C_2e^{2x} - \cancel{6C_3e^{3x}} + \frac{11}{2} + 3x$

$= 3x$

② $\frac{dy}{dt} = \frac{te^{y}}{2t-1}$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{e^{y}}}_{I_1} = \underbrace{\int \frac{t}{2t-1}\,dt}_{I_2}$$

- $I_1 = \int e^{-y}dy = -e^{-y} + C_1$
- $I_2 = \int \frac{t}{2t-1}\,dt$

$u = 2t-1 \quad du = 2dt \quad \frac{du}{2} = dt$

$$I_2 = \int \frac{\frac{u+1}{2}}{u} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1 + \frac{1}{u}\right)du = \frac{1}{4}\left(u + \ln u\right) + C_2$$

$$= \frac{1}{4}\left[2t - 1 + \ln(2t-1)\right] + C_2.$$

La solución general es

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\ln(2t-1) + C.$$

③ Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta después de t años del depósito inicial, entonces

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}05S - 5000 \;;\; S(0) = D_0 \;\wedge\; S(10) = 0.$$

donde D_0 es el depósito inicial que hace Alonzo.

Paso 1. Forma estándar

$$\frac{dS}{dt} \underbrace{-\,0{,}05}_{p(t)} S = \underbrace{-5000}_{q(t)}$$

Paso 2. Factor integrante

$$I = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -0{,}05dt} = e^{-0{,}05t}$$

Paso 3. Resolver

$$\int Iq(t)dt$$

$$= \int e^{-0{,}05t}(-5000)\,dt = 100\,000e^{-0{,}05t}$$

Paso 4. Solución general

$$S(t) = \frac{1}{I}\left[\int Iq(t)dt + C\right]$$

$$= e^{0{,}05t}\left[100\,000e^{-0{,}05t} + C\right]$$

$$\Rightarrow S(t) = 100\,000 + Ce^{0{,}05t}$$

Como $S(10) = 0$, entonces

$$0 = S(10) = 100\,000 + Ce^{1/2}$$

$$\Rightarrow C = -100\,000e^{-1/2}$$

Por tanto,

$$S(t) = 100\,000 - 100\,000e^{0{,}05t - 1/2}$$

Luego,

$$D_0 = S(0) = 100\,000 - 100\,000e^{-1/2}$$

$$\approx 39347.$$

Scanned by CamScanner

(4) $\underbrace{xy}_{M}\,dx + \underbrace{(2x^2+3y^2-20)}_{N}\,dy = 0$

a) $M_y = x \wedge N_x = 4x$

La ED no es exacta porque $M_y \neq N_x$.

b) $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{4x - x}{xy} = \dfrac{3x}{xy} = \dfrac{3}{y}$

$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{3}{y} dy} = e^{3\ln y} = y^3$

Multiplicando la ED por el factor integrante, obtenemos

$\underbrace{xy^4}_{M^*}\,dx + \underbrace{(2x^2y^3+3y^5-20y^3)}_{N^*}\,dy = 0$. (*)

$M_y^* = 4xy^3 \wedge N_x^* = 4xy^3$

Como $M_y^* = N_x^*$, entonces (*) es exacta.

Existe $f(x,y)$ tal que

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = M^* \wedge \dfrac{\partial f}{\partial y} = N^*$

esto es,

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = xy^4 \wedge \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y^3+3y^5-20y^3$

$\Downarrow$

$f(x,y) = \int xy^4\,dx + g(y)$

$= \frac{1}{2}x^2y^4 + g(y)$

Ahora bien,

$2x^2y^3+3y^5-20y^3 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$= 2x^2y^3 + g'(y)$

$\Rightarrow g'(y) = 3y^5 - 20y^3$

Por consiguiente,

$g(y) = \int (3y^5-20y^3)\,dy + C$

$= \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + C.$

Por tanto,

$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + C$

La solución general de la ED es

$\frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 = C.$

//

Scanned by CamScanner

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Departamento de Matemáticas y Estadística
Final de Cálculo III (ANEC) 201930
Fila B
Noviembre 26 de 2019

Nombre completo:______________________________Código:______________________________

1. **[10 pts]** Compruebe que la función $y = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$ es solución de la ecuación diferencial
$$2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x.$$
Aquí C_1 y C_2 son constantes reales.

---

2. **[10 pts]** Determine la solución general de la ecuación de *variables separables*
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 4}{xy}.$$

---

3. **[15 pts]** Alonzo planea hacer un depósito inicial en una cuenta de ahorros que gana 4% de interés anual, capitalizado continuamente, y luego hacer retiros de \$5 000 por año.
   (a) [10 pts] Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $S(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.
   (b) [5 pts] ¿Cuánto debe depositar si su cuenta tarda 10 años en agotarse?

---

4. **[15 pts]** Resuelva la ecuación diferencial
$$(3x^2 + 2y^2 - 20)dx + xydy = 0.$$
   (a) [3 pts] Demuestre que la ED no es exacta.
   (b) [4 pts] Verifique que un factor integrante para la ED es $\mu(x) = x^3$.
   (c) [8 pts] Determine la solución general de la ED.

Tiempo máximo: 90 minutos.

Importante: Cualquier manipulación durante el examen de celulares, relojes inteligentes o dispositivos móviles en general, será causal de anulación del examen al ser considerado intento de fraude!

Solución fila B

① $y' = -\frac{1}{2} c_1 x^{-3/2} - c_2 x^{-2} + \frac{2}{15} x - \frac{1}{6}$

$y'' = \frac{3}{4} c_1 x^{-5/2} + 2c_2 x^{-3} + \frac{2}{15}$

Entonces,

$2x^2 y'' + 5xy' + y$

$= 2x^2\left(\frac{3}{4} c_1 x^{-5/2} + 2c_2 x^{-3} + \frac{2}{15}\right)$

$+ 5x\left(-\frac{1}{2} c_1 x^{-3/2} - c_2 x^{-2} + \frac{2}{15} x - \frac{1}{6}\right)$

$+ \left(c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1} + \frac{1}{15} x^2 - \frac{1}{6} x\right)$

$= \cancel{\frac{3}{2} c_1 x^{-1/2}} + \cancel{4 c_2 x^{-1}} + \frac{4}{15} x^2$

$\cancel{-\frac{5}{2} c_1 x^{-1/2}} \cancel{- 5 c_2 x^{-1}} + \frac{2}{3} x^2 - \frac{5}{6} x$

$\cancel{+ c_1 x^{-1/2}} \cancel{+ c_2 x^{-1}} + \frac{1}{15} x^2 - \frac{1}{6} x$

$= \left(\frac{4}{15} + \frac{2}{3} + \frac{1}{15}\right) x^2 - \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right) x$

$= x^2 - x.$

② $\underbrace{\int \frac{y}{y^2+4}\, dy}_{I} = \int \frac{dx}{x}$

- Para I: $u = y^2+4 \quad du = 2y\,dy$

Entonces,

$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln(y^2+4) + C.$

La solución general de la ED es

$$\frac{1}{2} \ln(y^2+4) = \ln x + C.$$

③ Sea $S(t)$ el saldo en la cuenta después de t años del depósito inicial, entonces

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}04 S - 5000 \;;\; S(0) = D_0 \;\wedge\; S(10) = 0$$

donde D_0 es el depósito inicial que hace Alonzo.

Paso 1. Forma estándar

$$\frac{dS}{dt} \underbrace{-0{,}04}_{p(t)} S = \underbrace{-5000}_{q(t)}$$

Paso 2. Factor integrante

$$I = e^{\int p(t)dt} = e^{\int -0{,}04\,dt} = e^{-0{,}04t}$$

Paso 3. Resolver

$\int I q(t)\,dt$

$= \int e^{-0{,}04t} \cdot (-5000)\,dt = 125000\, e^{-0{,}04t}$

Paso 4. Solución general

$S(t) = \frac{1}{I}\left[\int I q(t)\,dt + C\right]$

$= e^{0{,}04t}\left[125000\, e^{-0{,}04t} + C\right]$

$\Rightarrow S(t) = 125000 + C e^{0{,}04t}$

Como $S(10) = 0$, entonces

$0 = S(10) = 125000 + C e^{0{,}4}$

$\Rightarrow C = -125000\, e^{-0{,}4}$

Por tanto,

$S(t) = 125000 - 125000\, e^{0{,}04t - 0{,}4}$

Luego,

$D_0 = S(0) = 125000 - 125000\, e^{-0{,}4}$

≈ 41210

④ $\underbrace{(3x^2+2y^2-20)}_{M}dx+\underbrace{xy}_{N}dy=0$

a) $M_y=4y \wedge N_x=y$

la ED no es exacta porque $M_y \neq N_x$.

b) $\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{4y-y}{xy}=\frac{3y}{xy}=\frac{3}{x}$.

$\Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{3}{x}dx}=e^{3\ln x}=x^3$

multiplicando la ED por el factor integrante, obtenemos

$\underbrace{(3x^5+2x^3y^2-20x^3)}_{M^*}dx+\underbrace{x^4y}_{N^*}dy=0$. ⊛

$M^*_y=4x^3y \wedge N^*_x=4x^3y$

Como $M^*_y=N^*_x$, entonces ⊛ es exacta.

Existe $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x}=M^* \wedge \frac{\partial f}{\partial y}=N^*$

esto es,

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^5+2x^3y^2-20x^3 \wedge \frac{\partial f}{\partial y}=x^4y$

$\Downarrow$

$f(x,y)=\int x^4y\,dy+g(x)$

$=\frac{1}{2}x^4y^2+g(x)$

Ahora bien,

$3x^5+2x^3y^2-20x^3=\frac{\partial f}{\partial x}$

$=2x^3y^2+g'(x)$

$\Rightarrow g'(x)=3x^5-20x^3$

Por consiguiente,

$g(x)=\int(3x^5-20x^3)dx+C$

$=\frac{1}{2}x^6-5x^4+C$.

Por tanto,

$f(x,y)=\frac{1}{2}x^4y^2+\frac{1}{2}x^6-5x^4+C$.

La solución general de la ED es

$\frac{1}{2}x^4y^2+\frac{1}{2}x^6-5x^4=C$.